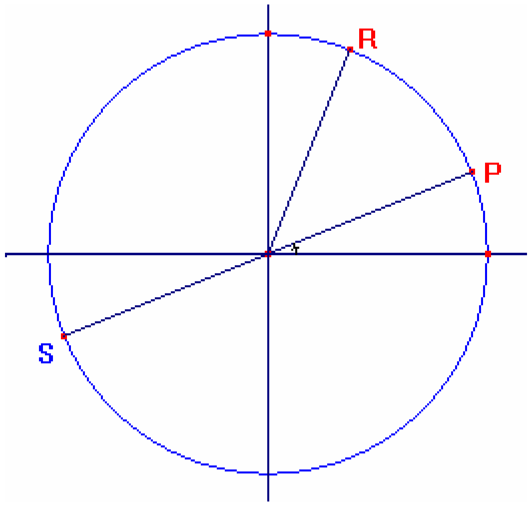
Uitwerkingen goniometrische functies Hst. 11 deel B3

1. $f(x) = \sin(-x) = -\sin(x)$ $\quad g(x) = \cos(-x) = \cos(x)$

   $h(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos(x)$ $\quad j(x) = \cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\sin(x)$

   $k(x) = \sin(x + \pi) = -\sin(x)$ $\quad l(x) = \cos(x + \pi) = -\cos(x)$

2. Zie ook de figuur. Er geldt:



a. Punt P heeft een draaiingshoek van α en heeft de coördinaten (x_p, y_p)
Bij het punt R. hoort een draaiingshoek van $\frac{1}{2}\pi - \alpha$. De coördinaten van R
zijn : $x_R = y_p$ en $y_R = x_P \Rightarrow$
$y_P = \sin(\alpha) = \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$

b. Verder geldt:
Punt S heeft de draaiingshoek van $\pi + \alpha$ en $y_S = -y_P$
$\Rightarrow \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$

c. Ook geldt : $x_S = -x_P \Rightarrow \cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$

d. Veronderstel een willekeurigpunt P met coördinaten x_P en y_P.
Je kan altijd een rechthoekige driehoek maken en dan Pyth. daarin toepassen.
Dat geeft dan : $(x_P)^2 + (y_p)^2 = 1$ Ook al zijn de x en/ of de y coördinaten negatief dan wordt het minteken opgeheven door de kwadraten.
We krijgen dan : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

3.

a. $\sin(x + \frac{1}{6}\pi) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - (x + \frac{1}{6}\pi)\right) = \cos(-x + \frac{1}{3}\pi)$

b. $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = \sin(2x + \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2x + \frac{5}{6}\pi)$

c. $-\sin(3x - \frac{2}{3}\pi) = \sin(\frac{2}{3}\pi - 3x) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - (\frac{2}{3}\pi - 3x)\right) = \cos(3x - \frac{1}{6}\pi)$

d. $-\cos(4x + 1\frac{1}{6}\pi) = \cos(4x + \frac{1}{6}\pi) = \sin(4x + \frac{4}{6}\pi) = \sin(4x + \frac{2}{3}\pi)$

4.

a.

$$\begin{aligned}(\sin(\alpha) - \cos(\alpha))^2 &= \sin^2(\alpha) - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) \\ &= \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ &= 1 - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\end{aligned}$$

b.

$$\frac{2\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{2\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = 2\tan^2(\alpha) + 1$$

c.

$$\left(1+\tan^2(3x)\right).\cos^2(3x)=\left(1+\frac{\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)}\right)\cdot\cos^2(3x)\ =\cos^2(3x)+\frac{\sin^2(3x)}{\underset{1}{\cancel{\cos^2(3x)}}}\cdot\overset{1}{\cancel{\cos^2(3x)}}$$

$$=\cos^2(3x)+\sin^2(3x)=1$$

5.

a. $\sin^2(x)+4\cos(x)=1-\cos^2(x)+4\cos(x)$

b. $2\cos^2(x)+\sin(x)-2=2\left(1-\sin^2(x)\right)+\sin x-2=\cancel{2}-2\sin^2(x)+\sin(x)\cancel{-2}=-2\sin^2(x)+\sin(x)$

c. $2\sin^2(x)+\cos^2(x)+\cos(x)=2\left(1-\cos^2(x)\right)+\cos^2(x)+\cos(x)=2-\cos^2(x)+\cos(x)$

6.

$\sin(2x-\frac{1}{3}\pi)=-\cos(x+\frac{1}{3}\pi)\Leftrightarrow\cos(\frac{1}{2}\pi-(2x-\frac{1}{3}\pi))=\cos(x+1\frac{1}{3}\pi)\Leftrightarrow\cos(\frac{5}{6}\pi-2x)=\cos(x+1\frac{1}{3}\pi)$
$\frac{5}{6}\pi-2x=x+1\frac{1}{3}\pi+2k\pi\vee\frac{5}{6}\pi-2x=\pi-(x+1\frac{1}{3}\pi)+2k\pi\ \Leftrightarrow$
$-3x=\frac{1}{2}\pi+2k\pi\vee-x=-\frac{7}{6}\pi+2k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{1}{6}\pi-k.\frac{2}{3}\pi\vee x=1\frac{1}{6}\pi+2k\pi$
Op het interval [0 , 2π] krijgen we dan : $\frac{1}{2}\pi$; $1\frac{1}{6}\pi$; $1\frac{5}{6}\pi$

7.

a. sin (x + 0,5π) = cos(2x) ⇔ cos (0,5π -x – 0,5π) = cos(2x) ⇔ cos(x) = cos(2x) ⇔
x = 2x + 2.kπ ∨ x = -2x + 2.kπ ⇔ x = -k.2π ∨ 3x = 2kπ ⇔
x = -2kπ ∨ $x=k.\frac{2}{3}\pi$. ⇒ Oplossingen : 0 ; 2π ; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$

b. sin(3x) = -cos(x) ⇔ sin(3x) = cos (x + π) ⇔ sin(3x) = sin (0,5π - x - π) ⇔
sin(3x) = sin (-x – 0,5π) ⇔
3x = -x – 0,5π + 2kπ ∨ 3x = π - (-x – 0,5π) + 2kπ ⇔
4x = -0,5π + 2kπ ∨ 2x = 1,5π + 2kπ ⇔
$x=-\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{2}k.\pi$ ∨ $x=\frac{3}{4}\pi$ + k.π ⇒ Oplossingen : $\dfrac{3}{8}\pi$; $\dfrac{7}{8}\pi$; $\dfrac{11}{8}\pi$; $\dfrac{15}{8}\pi$; $\frac{3}{4}\pi$ en $1\frac{3}{4}\pi$

c. $\sin^2(x)$ + 0,5cos(x) = 1 ⇔ 1 – $\cos^2(x)$ + 0,5.cos(x) =1 ⇔ - $\cos^2(x)$ + 0,5.cos(x) = 0 ⇔
cos(x) (0,5 – cos(x)) = 0 ⇔ cos(x) = 0 ∨ cos (x) = 0,5 ⇔
x = 0,5π + kπ ∨ $x=\frac{1}{3}\pi+2k\pi$ ∨ $x=-\frac{1}{3}\pi+2k\pi$ ⇒
De oplossingen zijn : 0,5π ; 1,5π ; $\frac{1}{3}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$

d. cos(x – 1) = - cos(2x + 1) ⇔ cos(x – 1) = cos(2x + π + 1) ⇔
x – 1 = 2x + π + 1 + 2kπ ∨ x – 1 = -2x - π - 1 – 2kπ ⇔
-x = π + 2 + 2kπ ∨ 3x = -π - 2kπ ⇔
x = -π - 2 – 2kπ ∨ $x=-\frac{1}{3}\pi-k.\frac{2}{3}\pi$ ⇒
De oplossingen zijn : π - 2 ; $\frac{1}{3}\pi$; π ; $1\frac{2}{3}\pi$

e. $\sin(2x + \pi) = 1 - 2\sin(2x) \Leftrightarrow 2\sin(2x) - \sin(2x) = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = 1 \Leftrightarrow$
$2x = 0{,}5\pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = 0{,}25\pi + k\pi \Rightarrow$
De oplossingen zijn : $0{,}25\pi$; $1{,}25\pi$

f. $2.\sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2(x)) + \cos^2(x) + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow$
$2 - 2\cos^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos^2(x) + \cos(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow$
Stel $\cos(x) = p \Rightarrow -p^2 + p + 2 = 0 \Leftrightarrow p^2 - p - 2 = 0 \Leftrightarrow (p-2)(p+1) = 0 \Leftrightarrow$
$p = 2 \vee p = -1 \Leftrightarrow \cos(x) = 2$ (kan niet) $\vee \cos(x) = -1 \Leftrightarrow$
$x = \pi + 2k\pi \Rightarrow$ De oplossing is: $x = \pi$

8a $\cos(2\pi t) = \sin(0{,}5\pi t) \Leftrightarrow \cos(2\pi t) = \cos(0{,}5\pi - 0{,}5\pi t) \Leftrightarrow$
$2\pi t = 0{,}5\pi - 0{,}5\pi t + 2k\pi \vee 2\pi t = -0{,}5\pi + 0{,}5\pi t - 2k\pi \Leftrightarrow$
$2{,}5\pi t = 0{,}5\pi + 2k\pi \vee 1{,}5\pi t = -0{,}5\pi - 2k\pi \Leftrightarrow$
$t = \frac{1}{5} + k.\frac{4}{5} \vee t = -\frac{1}{3} - k.\frac{4}{3} \Rightarrow$ De oplossingen zijn : $\frac{1}{5}$; 1 ; $1\frac{4}{5}$; $2\frac{3}{5}$; $2\frac{1}{3}$

b. $\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = -\cos(\pi t) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \cos(\pi t + \pi) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \pi t - \pi\right) \Leftrightarrow$
$\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \sin(-\pi t - \tfrac{1}{2}\pi) \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} = -\pi t - \tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi \vee \frac{\pi t}{6} = \pi - \left(-\pi t - \tfrac{1}{2}\pi\right) + 2k\pi \Leftrightarrow$
$\pi t = -6\pi t - 3\pi + 12k\pi \vee \pi t = 6\pi + 6\pi t + 3\pi + 12k\pi \Leftrightarrow 7\pi t = -3\pi + 12k\pi \vee -5\pi t = 9\pi + 12k\pi$
$\Leftrightarrow t = -\frac{3}{7} + k.\frac{12}{7} \vee t = -\frac{9}{5} - k.\frac{12}{5} \Rightarrow$
De oplossingen zijn : $1\frac{2}{7}$; 2 ; $\frac{3}{5}$; 3

9.
a. $2\sin(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x) = 0$

b. $\sin(2x) = \sin(x) \Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \vee 2x = \pi - x + 2k\pi$

c. $2\sin(x) = \cos(x)$ niet algebraïsch .

d. $2\sin(x) = \sin(x + \tfrac{1}{3}\pi)$ niet algebraïsch

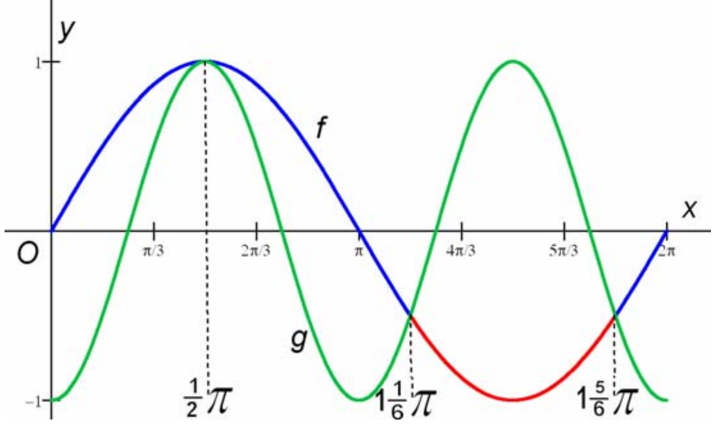
e. $\sin(2x) = \sin(x + \tfrac{1}{3}\pi) \Leftrightarrow 2x = x + \tfrac{1}{3}\pi + 2k\pi \vee 2x = \pi - (x + \tfrac{1}{3}\pi) + 2k\pi$

f. $5\sin(x) = \sin(5x)$ niet algebraïsch .

10. $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = -\cos(2x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

a. $y = \cos(x) \xrightarrow{V_{x-as,-1}} y = -\cos(x) \xrightarrow{V_{y-as,\frac{1}{2}}} g(x) = -\cos(2x)$

b. $g(x) = -2\cos(2x)$
Er is een spiegeling t.o.v. de x-as.
En de periode is π .



c. $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\pi + 2k\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi + 2k\pi \Rightarrow$
Binnen het interval krijgen we : $x = 1\frac{1}{4}\pi \ \vee \ x = 1\frac{3}{4}\pi$

d. $g(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\cos(2x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \Leftrightarrow$
$2x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \ \vee \ 2x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\pi + k\pi \ \vee \ x = -\frac{1}{3}\pi + k\pi \Rightarrow$
Binnen het interval krijgen we : $x = \frac{1}{3}\pi \ \vee \ x = \frac{2}{3}\pi \ \vee \ x = 1\frac{1}{3}\pi \ \vee \ x = 1\frac{2}{3}\pi$

e. Eerst gaan we berekenen $f(x) = g(x) \Rightarrow$:

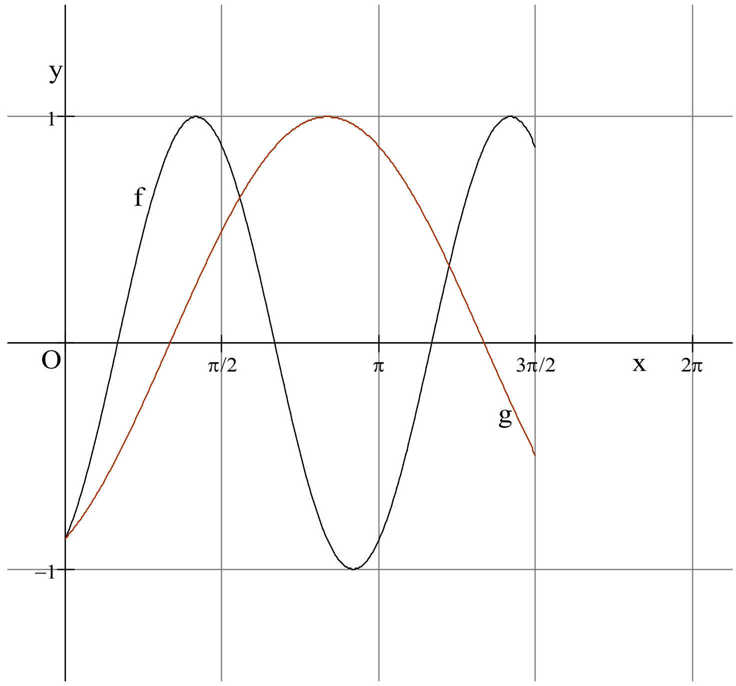
$$\begin{array}{lll} \sin(x) = -\cos(2x) & \Leftrightarrow & \\ \cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos(\pi + 2x) & & \\ \frac{1}{2}\pi - x = \pi + 2x + k\cdot 2\pi & \vee & \frac{1}{2}\pi - x = -\pi - 2x + k\cdot 2\pi \\ -3x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi & \vee & x = -1\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \\ x = -\frac{1}{6}\pi - k.\frac{2}{3}\pi & \vee & x = -1\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \end{array}$$

Op het gegeven interval krijgen we dan : $x = \dfrac{1}{2}\pi \ \vee \ x = 1\frac{1}{6}\pi \ \vee \ x = 1\frac{5}{6}\pi$
Oplossing $f \le g$: $x = \frac{1}{2}\pi \quad \vee \quad 1\frac{1}{6}\pi \le x \le 1\frac{5}{6}\pi$

11. $f(x) = \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ en $g(x) = -\cos(x + \frac{1}{6}\pi)$ op het interval $[0 ; 1{,}5\pi]$

a. $f(x) = \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$: de ev. stand is 0 ; de amplitude is 1 ; de periode is π
en het beginpunt is $\left(0, -\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.
$g(x) = -\cos\left(x + \dfrac{1}{6}\pi\right)$: de ev. stand is 0 ; de amplitude is 1 ; de periode is 2π
en het beginpunt is $\left(0, -\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ Hier is sprake van een sp. en T($-\frac{1}{6}\pi$,0).
De periode begint hier in het punt
($-\frac{1}{6}\pi$,-1)

b. Zie de figuur.



c.

$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x-\frac{1}{3}\pi)=0$

$2x-\frac{1}{3}\pi=k\cdot\pi$

$2x=\frac{1}{3}\pi+k\cdot\pi$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{6}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi \\ x \text{ op } [0,1\frac{1}{2}\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ 1\frac{1}{6}\pi}$$

$g(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x+\frac{1}{6}\pi)=0$

$x+\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}\pi+k\cdot\pi \\ x \text{ op } [0,1\frac{1}{2}\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}\pi,\ 1\frac{1}{3}\pi}$$

d.

Eerst: $f(x)=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x-\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{2}; \qquad \sin^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{1}{6}\pi$

$2x-\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad 2x-\frac{1}{3}\pi=\pi-\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

$2x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad 2x=\frac{7}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\pi \quad \vee \quad x=\frac{7}{12}\pi+k\cdot\pi \\ x \text{ op } [0,1\frac{1}{2}\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{4}\pi,\ 1\frac{1}{4}\pi,\ \frac{7}{12}\pi$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)>\frac{1}{2} \\ \text{grafiek} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4}\pi<x<\frac{7}{12}\pi \quad \vee \quad 1\frac{1}{4}\pi<x\le 1\frac{1}{2}\pi}$$

e.

$$
\begin{aligned}
&f(x)=g(x) \;\Leftrightarrow \sin(2x-\tfrac{1}{3}\pi)=-\cos(x+\tfrac{1}{6}\pi)\Leftrightarrow 1\\
&\cos(\tfrac{1}{2}\pi-(2x-\tfrac{1}{3}\pi)=\cos(\pi+x+\tfrac{1}{6}\pi)\Leftrightarrow \cos(-2x+\tfrac{5}{6}\pi)=\cos(x+1\tfrac{1}{6}\pi)\\
&-2x+\tfrac{5}{6}\pi=x+1\tfrac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \quad\vee\quad -2x+\tfrac{5}{6}\pi=-x-1\tfrac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi\\
&-3x=\tfrac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi \quad\vee\quad -x=-2\pi+k\cdot 2\pi\\
&\left.\begin{array}{l} x=-\tfrac{1}{9}\pi+k\cdot\tfrac{2}{3}\pi \quad\vee\quad x=k\cdot 2\pi \\ x \;\text{ op }\; [0,1\tfrac{1}{2}\pi]\end{array}\right\}\Rightarrow x=\tfrac{5}{9}\pi,\ \tfrac{11}{9}\pi,\ 0
\end{aligned}
$$

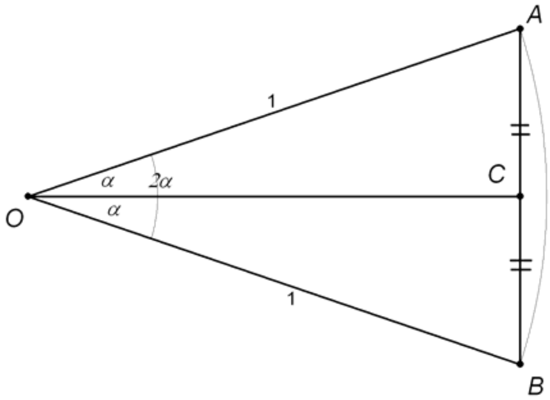
$$
\left.\begin{array}{l} f(x)\le g(x) \\ \text{grafiek}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\tfrac{5}{9}\pi<x<\tfrac{11}{9}\pi}
$$

12.
Zie figuur.

$$
\left.\begin{array}{l} \text{In } \triangle OAC \;\; \sin(\alpha)=\dfrac{AC}{1}=AC \\ \text{gespiegeld in } x\text{-as, dus } AB=2AC \end{array}\right\}\Rightarrow AB=2\sin(\alpha)
$$

In $\triangle OAB$ cos-regel: $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos(2\alpha)\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\left(2\sin(\alpha)\right)^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cos(2\alpha)\Leftrightarrow\\
&4\sin^2(\alpha)=2-2\cos(\alpha)\Leftrightarrow\\
&\boxed{\cos(2\alpha)=1-2\sin^2(\alpha)}
\end{aligned}
$$



13.

a. Bekend is : $\cos(t-u)=\cos(t)\cdot\cos(u)+\sin t\sin(u)$

Vervang nu u door $-u$. $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\cos(t+u)&=\cos(t)\cdot\cos(-u)+\sin t\cdot\sin(-u)\\
&=\cos(t)\cdot\cos(u)-\sin t\cdot\sin(u)
\end{aligned}
$$

b. Nu uitgaan van de somformule van de cosinus: $\Rightarrow$

$\cos(t+u)=\cos(t)\cdot\cos(u)-\sin t\cdot\sin(u)$

Vervang nu u door $u-0{,}5\pi$ en we weten $\sin(u-0{,}5\pi)=-\cos(u)$ $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\cos(t+u-0{,}5\pi)=\cos(t)\cdot\cos(u-0{,}5\pi)-\sin t\cdot\sin(u-0{,}5\pi)\Leftrightarrow\\
&\sin(t+u)=\cos t.\sin(u)-\sin(t).(-\sin(u))\Leftrightarrow\\
&\sin(t+u)=\cos t.\sin(u)+\sin(t).\sin(u)
\end{aligned}
$$

c.

$\sin(t-u)=\sin(t)\cdot\cos(u)-\cos(t)\cdot\sin(u)$

Vervang u door $-u$

$$
\begin{aligned}
\sin(t+u)&=\sin(t)\cdot\cos(-u)-\cos(t)\cdot\sin(-u)\\
&=\sin(t)\cdot\cos(u)\;+\;\cos(t)\cdot\sin(u)
\end{aligned}
$$

14.

a.

$\sin(t+u) = \sin t \cdot \cos u + \cos t \cdot \sin u$ Neem: $t = u = A \Rightarrow$

$\sin(A+A) = \sin A \cdot \cos A + \cos A \cdot \sin A \Rightarrow$

$\boxed{\sin(2A) = 2 \cdot \sin A \cdot \cos A}$

$\cos(t+u) = \cos t \cdot \cos u - \sin t \cdot \sin u$ Neem: $t = u = A \Rightarrow$

$\cos(A+A) = \cos A \cdot \cos A - \sin A \cdot \sin A \Rightarrow$

$\boxed{\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)}$

b.

$$\begin{array}{ll} \cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A) & \text{(zie (2))} \\ 1 \qquad = \cos^2(A) + \sin^2(A) \; + & \\ \hline 1 + \cos(2A) = 2 \cdot \cos^2(A) & \Rightarrow \end{array}$$

$\boxed{\cos(2A) = 2 \cdot \cos^2(A) - 1}$

$$\begin{array}{ll} \cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A) & \text{(zie (2))} \\ 1 \qquad = \cos^2(A) + \sin^2(A) \; - & \\ \hline \cos(2A) - 1 = -2 \cdot \sin^2(A) & \Rightarrow \end{array}$$

$\boxed{\cos(2A) = 1 - 2 \cdot \sin^2(A)}$

15

a.

$$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1 \Rightarrow \quad 2\cos^2(A) = 1 + \cos(2A) \Rightarrow$$
$$\cos^2(A) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2A)$$

b.

$$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A) \Rightarrow \quad 2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A) \Rightarrow$$
$$\sin^2(A) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2A)$$

16

a.

$\sin(x).\cos(x) = \tfrac{1}{2}\sin(x-1) \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{lcl} 2\sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(x-1) & \Leftrightarrow & \sin(2x) = \sin(x-1) \\ 2x = x - 1 + k \cdot 2\pi & \vee & 2x = \pi - x + 1 + k \cdot 2\pi \\ x = -1 + k \cdot 2\pi & \vee & 3x = \pi + 1 + k \cdot 2\pi \\ x = -1 + k \cdot 2\pi & \vee & x = \tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{3} + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \end{array}$$

b.

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2(2x) = \cos(4x) + \tfrac{1}{2} \\ \cos^2(2x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(4x) \text{ (zie som 15)} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(4x) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(4x) \Rightarrow$$

$0{,}5\cos(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0{,}5\pi + k.\pi \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{8}\pi + k.\tfrac{1}{4}\pi$

c. $\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)=\cos(x)+1\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(x)=\cos(x)+1\frac{1}{4}$ (zie som 15) $\Leftrightarrow$

-1,5cos(x) = 0,75 $\Leftrightarrow$ cos (x) = -0,5 $\Leftrightarrow$

$x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \vee x=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi$

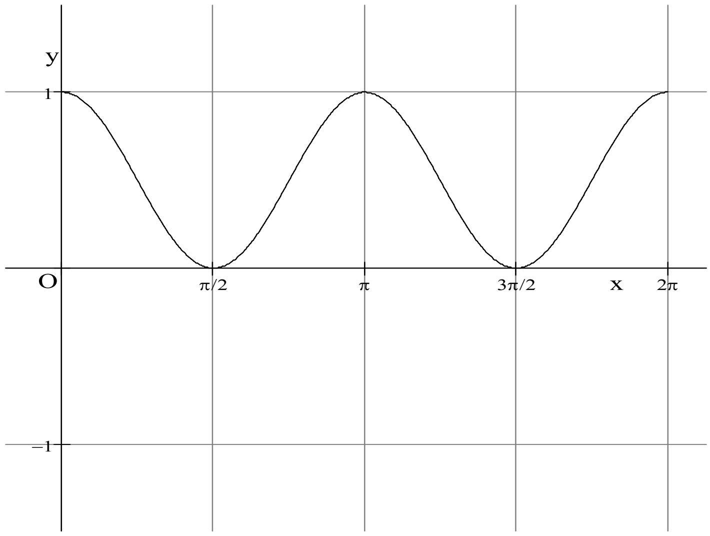
d. $\left(\sin(x)+\cos(x)\right)^2=1{,}5\Leftrightarrow\sin^2(x)+2\sin(x).\cos(x)+\cos^2(x)=1{,}5\Leftrightarrow$

1 + sin(2x) = 1,5 $\Leftrightarrow$ sin(2x) = 0,5 $\Leftrightarrow$

$2x=\frac{1}{6}\pi+k2\pi\vee 2x=\frac{5}{6}\pi+k.2\pi\Leftrightarrow x=\frac{1}{12}\pi+k\pi\vee x=\frac{5}{12}\pi+k\pi$

17.

a. $y=\sin^2(x)+\cos(2x)$



Er geldt : cos(2x) = 1 – 2sin²(x) $\Leftrightarrow$

2sin²(x) = 1 – cos(2x) $\Leftrightarrow$

sin²(x) = 0,5 – 0,5.cos(2x) $\Rightarrow$

y = 0,5 – 0,5cos(2x) + cos(2x) $\Leftrightarrow$

y = 0,5 + 0,5cos(2x)

Je kan dit resultaat ook vanuit de grafiek krijgen .
We zien dan : amplitude 0,5 ; ev. stand is 0,5 en de periode is π en het is een cosinus.

b. Zie nu ook bij onderdeel a. Toevallig al gedaan !!

18.

$$\sin(t+u)=\sin(t)\cdot\cos(u)+\cos(t)\cdot\sin(u)$$

$$\begin{aligned}\sin(3x)=\sin(x+2x)&=\sin(x)\cdot\cos(2x)+\cos(x)\cdot\sin(2x)\\&=\sin(x)\cdot(1-2\sin^2(x))+\cos(x)\cdot2\sin(x)\cos(x)\\&=\sin(x)-2\sin^3(x)+2\sin(x)\cdot\cos^2(x)\\&=\sin(x)-2\sin^3(x)+2\sin(x)\cdot\left(1-\sin^2(x)\right)\\&=3\sin(x)-4\sin^3(x)\end{aligned}$$

19

a.

$$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2(\alpha)\qquad\Rightarrow\sin^2(\alpha)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(2\alpha);\ \text{Neem } \alpha=\tfrac{1}{2}x\qquad\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin^2(\tfrac{1}{2}x)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(x)\\&y=1-\cos(x)-\sin^2(\tfrac{1}{2}x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow y=1-\cos(x)-\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(x)\right)=$$

$$y=1-\cos(x)-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos(x)=\boxed{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(x)}$$

b.

$$\cos(t+u)=\cos(t)\cdot\cos(u)-\sin(t)\cdot\sin(u)$$
$$\begin{aligned}\cos(3x)=\cos(x+2x)&=\cos(x)\cdot\cos(2x)-\sin(x)\cdot\sin(2x)\\&=\cos(x)\cdot\left(2\cos^2(x)-1\right)-\sin(x)\cdot 2\sin(x)\cos(x)\\&=2\cos^3(x)-\cos(x)-2\sin^2(x)\cdot\cos(x)\\&=2\cos^3(x)-\cos(x)-2(1-\cos^2(x))\cdot\cos(x)\\&=2\cos^3(x)-\cos(x)-2\cos(x)+2\cos^3(x)\\&=\boxed{4\cos^3(x)-3\cos(x)}\end{aligned}$$

ook kan: bekend uit a:

$$\sin(3x)=3\sin(x)-4\sin^3(x)$$
$$\begin{aligned}\cos(3x)=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-3x)=-\sin(\pi+\tfrac{1}{2}\pi-3x)&=-\sin\left(3(\tfrac{1}{2}\pi-x)\right)\\&=-3\sin(\tfrac{1}{2}\pi-x)+4\sin^3(\tfrac{1}{2}\pi-x)\\&=\boxed{-3\cos(x)+4\cos^3(x)}\end{aligned}$$

20.

a. $-\cos(A) = \cos(A + \pi) \Rightarrow -\cos(2x) = \cos(2x + \pi)$

b. $\sin(2x) = \cos(0{,}5\pi - 2x)$

c. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \Leftrightarrow 2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x) \Leftrightarrow \sin^2(x) = 0{,}5 - 0{,}5\cos(2x) \Rightarrow$
$\sin^2(2x) = 0{,}5 - 0{,}5.\cos(4x)$

d. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1 \Leftrightarrow \cos^2(2x) = 0{,}5\cos(2x) + 0{,}5 \Rightarrow$
$\cos^2(3x) = 0{,}5\cos(1{,}5x) + 0{,}5$

e. $\cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x)$ ook kan : $\cos(4x) = \sin(0{,}5\pi - 4x)$

21. $x_B = -x_A$ en $y_B = y_A$; $x_C = -x_A$ en $y_C = -y_A$.

22.

a. $f(-p)=-p.\cos(-p)=-p.\cos(p)=-f(p) \Rightarrow f$ is symmetrisch in de oorsprong.

b. $g(-p)=-p.\sin(-p)=-p.-\sin(p)=p.\sin(p)\Rightarrow$ y-as is as van symmetrie.

23. Gegeven: $f(x)=\cos^2(x).\sin(x)$

a. $f(-p)=\cos^2(-p).\sin(-p)=\cos^2(p).-\sin(p)=-\cos^2(p).\sin(p)=-f(p) \Rightarrow$
f is puntsymmetrisch in O.

b.

$$\left.\begin{array}{l} f(\tfrac{1}{2}\pi - p) = \cos^2(\tfrac{1}{2}\pi - p).\sin(\tfrac{1}{2}\pi - p) = \sin^2(p).\cos(p) \\ f(\tfrac{1}{2}\pi + p) = \cos^2(\tfrac{1}{2}\pi + p).\sin(\tfrac{1}{2}\pi + p) = \cos^2(\tfrac{1}{2}\pi - -p).\cos(p) = \sin^2(-p).\cos(p) = \sin^2(p).\cos(p) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ $f(0{,}5\pi - p) = f(0{,}5\pi + p)$ $\Rightarrow$ f is symmetrisch in de lijn $x = 0{,}5\pi$.

24. Gegeven: $f(x) = 2\sin(x) - 2\cos(x)$

a.

$$f(-\tfrac{1}{4}\pi - p) = 2\sin(-\tfrac{1}{4}\pi - p) - 2.\cos(-\tfrac{1}{4}\pi - p) =$$
$$2.\left(\sin(-\tfrac{1}{4}\pi).\cos(-p) - \cos(-\tfrac{1}{4}\pi).\sin(-p)\right) - 2.\left(\cos(-\tfrac{1}{4}\pi).\cos(-p) + \sin(-\tfrac{1}{4}\pi).\sin(-p)\right) =$$
$$-\sqrt{2}.\cos(p) + \sqrt{2}.\sin(p) - \sqrt{2}.\cos(p) - \sqrt{2}\sin(p) = -2\sqrt{2}.\cos(p)$$

b.

$$f(-\tfrac{1}{4}\pi + p) = 2\sin(-\tfrac{1}{4}\pi + p) - 2.\cos(-\tfrac{1}{4}\pi + p) =$$
$$2.\left(\sin(-\tfrac{1}{4}\pi).\cos(p) + \cos(-\tfrac{1}{4}\pi).\sin(p)\right) - 2.\left(\cos(-\tfrac{1}{4}\pi).\cos(p) - \sin(-\tfrac{1}{4}\pi).\sin(p)\right) =$$
$$-\sqrt{2}.\cos(p) + \sqrt{2}.\sin(p) - \sqrt{2}.\cos(p) - \sqrt{2}\sin(p) = -2\sqrt{2}.\cos(p)$$

Samen met onderdeel a volgt nu : $f(-\tfrac{1}{4}\pi - p) = f(-\tfrac{1}{4}\pi + p)$ $\Rightarrow$
De lijn $x = -\tfrac{1}{4}\pi$ is as van symmetrie.

25. Gegeven : $f(x) = \mathrm{co}x(x) + \sin(x) + 1$

a.

$$f(\tfrac{1}{4}\pi - p) = \cos(\tfrac{1}{4}\pi - p) + \sin(\tfrac{1}{4}\pi - p) + 1 =$$
$$\cos(\tfrac{1}{4}\pi).\cos(p) + \sin(\tfrac{1}{4}\pi).\sin(p) + \sin(\tfrac{1}{4}\pi).\cos(p) - \cos(\tfrac{1}{4}\pi).\sin(p) + 1 =$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\cos(p) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\sin(p) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\cos(p) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\sin(p) + 1 = \sqrt{2}.\cos(p) + 1$$

$$f(\tfrac{1}{4}\pi + p) = \cos(\tfrac{1}{4}\pi + p) + \sin(\tfrac{1}{4}\pi + p) + 1 =$$
$$\cos(\tfrac{1}{4}\pi).\cos(p) - \sin(\tfrac{1}{4}\pi).\sin(p) + \sin(\tfrac{1}{4}\pi).\cos(p) + \cos(\tfrac{1}{4}\pi).\sin(p) + 1 =$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\cos(p) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\sin(p) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\cos(p) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\sin(p) + 1 = \sqrt{2}.\cos(p) + 1$$

Uit deze 2 berekeningen volgt: $f(\tfrac{1}{4}\pi - p) = f(\tfrac{1}{4}\pi + p)$ $\Rightarrow$
f is symmetrisch in de lijn $x = \tfrac{1}{4}\pi$.

b.

$$f(\tfrac{3}{4}\pi - p) = \cos(\tfrac{3}{4}\pi - p) + \sin(\tfrac{3}{4}\pi - p) + 1 =$$
$$\cos(\tfrac{3}{4}\pi).\cos(p) + \sin(\tfrac{3}{4}\pi).\sin(p) + \sin(\tfrac{3}{4}\pi).\cos(p) - \cos(\tfrac{3}{4}\pi).\sin(p) + 1 =$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\cos(p) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\sin(p) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\cos(p) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\sin(p) + 1 = \sqrt{2}.\sin(p) + 1$$

$f(\frac{3}{4}\pi + p) = \cos(\frac{3}{4}\pi + p) + \sin(\frac{3}{4}\pi + p) + 1 =$

$\cos(\frac{3}{4}\pi).\cos(p) - \sin(\frac{3}{4}\pi).\sin(p) + \sin(\frac{3}{4}\pi).\cos(p) + \cos(\frac{3}{4}\pi).\sin(p) + 1 =$

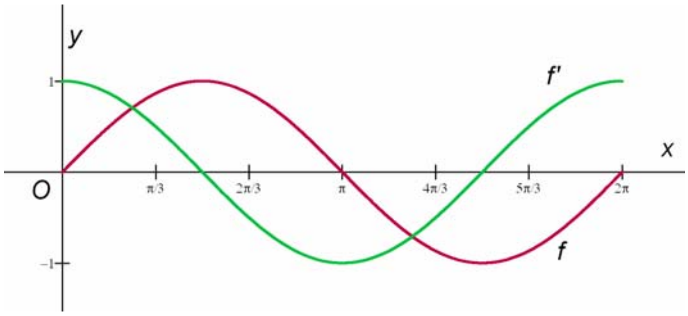
$-\frac{1}{2}\sqrt{2}.\cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2}.\sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2}.\cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2}.\sin(p) + 1 = -\sqrt{2}.\sin(p) + 1$

Uit bovenstaande berekeningen volgt :
$f(\frac{3}{4}\pi - p) + f(\frac{3}{4}\pi + p) = \sqrt{2}\sin(p) + 1 - \sqrt{2}.\sin(p) + 1 = 2$
en $2b = 2.1 = 2 \Rightarrow$ Deze som is gelijk aan $2b \Rightarrow f$ is puntsymmetrisch t.o.v. het punt $\left(\frac{3}{4}\pi, 1\right)$.

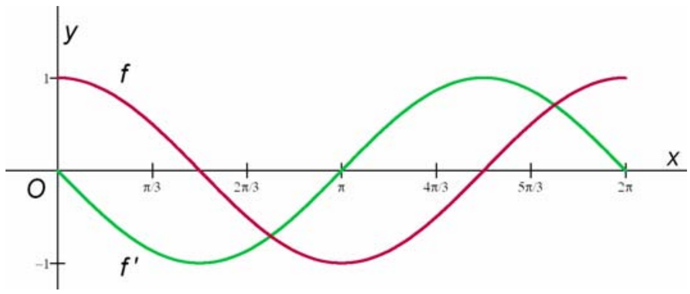
26.

a. $y_1 = \sin(x)$; $y_2 = \text{nDeriv}(y_1, x, x)$

b. $f\,'(x) = \cos(x)$



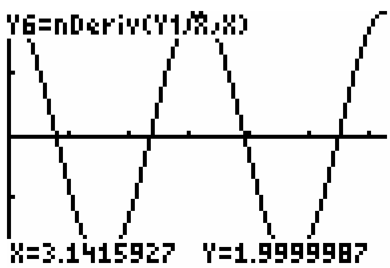
c.
$y_1 = \cos(x)$ $y_2 = \text{nDeriv}(y_1, x, x)$
$f\,'(x) = -\sin(x)$



27.

a. $f(x) = \sin(2x)$

In de figuur zien we de grafiek van de afgeleide van f.



b. $f\,'(x) = 2.\cos(2x)$

c. $g(x) = \cos(3x)$ dan $g'(x) = -3.\sin(3x)$

28. De afgeleide van y = cos(A) is de afgeleide van y = sin(0,5π + A) = cos (0,5π + A) = - sin (A) $\Rightarrow$ De afgeleide van y = cos (A) is dus : y'= -sin (A)

29.

$$\frac{d}{dx}\left(\sin(ax+b)\right)=\cos(ax+b).\frac{d}{dx}(ax)=a.\cos(ax+b)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\cos(ax+b)\right)=-\sin(ax+b).\frac{d}{dx}(ax)=-a.\sin(ax+b)$$

30.

a. $f(x)=3+4\sin(2x-\frac{1}{3}\pi)\Rightarrow f'(x)=4.\cos(2x-\frac{1}{3}\pi).2=8\cos(2x-\frac{1}{3}\pi)$

b. $g(x)=10+16\cos(\frac{1}{2}(x-1))\Rightarrow g'(x)=-16\sin(\frac{1}{2}(x-1)).\frac{1}{2}=-8\sin(\frac{1}{2}(x-1))$

c. $h(x)=x.\cos(x)\Rightarrow h'(x)=1.\cos(x)+x.(-\sin(x))=\cos(x)-x.\sin(x)$

d. $j(x)=x.\cos(2x)\Rightarrow j'(x)=1.\cos(2x)+x.(-\sin(2x)).2=\cos(2x)-2x.\sin(2x)$

e. $k(x)=x^2.\sin(3x)\Rightarrow k'(x)=2x.\sin(3x)+x^2.\cos(3x).3=2x.\sin(3x)+3x^2.\cos(3x)$

f. $l(x)=2x.\sin(3x-1)\Rightarrow l'(x)=2.\sin(3x-1)+2x.\cos(3x-1).3=2.\sin(3x-1)+6x.\cos(3x-1)$

31.

a. $f(x)=3\tan(2x)\Rightarrow f'(x)=3.\dfrac{1}{\cos^2(2x)}.2=\dfrac{6}{\cos^2(2x)}$

b. $g(x)=\tan^2(x)=\left(\tan(x)\right)^2\Rightarrow g'(x)=2.\tan(x).\dfrac{1}{\cos^2(x)}=2.\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}.\dfrac{1}{\cos^2(x)}=\dfrac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$

c. $h(x)=\cos(x).\tan(x)=\cos(x).\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=\sin(x)\Rightarrow h'(x)=\cos(x)$

32.

I : $f(x)=\sin(x).\sin(x)\Rightarrow f'(x)=\cos(x).\sin(x)+\sin(x).\cos(x)=2\sin(x).\cos(x)$

II: $f(x)=\left(\sin(x)\right)^2\Rightarrow f'(x)=2.\sin(x).\cos(x)$

III: $f(x)=\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}.(-\sin(2x).2=\sin(2x)=2\sin(x).\cos(x)$

Onderdeel II geeft mij het miste werk en heeft dus mijn voorkeur.

33

a. $f(x)=\left(\cos(x)\right)^2\Rightarrow \quad f'(x)=2\cos(x)\cdot-\sin(x)=-2\sin(x).\cos(x)$

b. $g(x)=2\left(\sin(x)\right)^2 \quad\Rightarrow\quad g'(x)=4\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

c. $h(x)=1+2\left(\cos(x)\right)^2 \Rightarrow \quad h'(x)=0+4\cos(x)\cdot -\sin(x)=-4\sin(x).\cos(x)$

d. $j(x)=x+3\left(\sin(x)\right)^2 \Rightarrow \quad j'(x)=1+6\sin(x)\cdot\cos(x)$

34.

a. $f(x)=\left(\sin(x)\right)^3 \Rightarrow \qquad f'(x)=3\left(\sin(x)\right)^2\cdot\cos(x)$

b. $g(x)=x\cdot\left(\sin(x)\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad g'(x)=1\cdot\left(\sin(x)\right)^2+x\cdot 2\sin(x)\cdot\cos(x)=\sin^2(x)+2x.\sin(x).\cos(x)$

c. $h(x)=\cos^2(2x)=\left(\cos(2x)\right)^2 \Rightarrow h'(x)=2.\cos(2x).(-\sin(2x)).2=-4\cos(2x).\sin(2x)$

d. $j(x)=\left(\cos(x^2)\right)^2 \Rightarrow j'(x)=2.\cos(x^2).(-\sin(x^2)).2x=-4x.\cos(x^2).\sin(x^2)$

35.

a.

$$f(x)=\left(\sin(x)\right)^3+\sin(x)\Rightarrow f'(x)=3.\left(\sin(x)\right)^2.\cos(x)+\cos(x)=3\left(1-\cos^2(x)\right).\cos(x)+\cos(x)=$$
$$3\left(\cos(x)-\cos^3(x)\right)+\cos(x)=3\cos(x)-3\cos^3(x)+\cos(x)=4\cos(x)-\cos^3(x)$$

b.

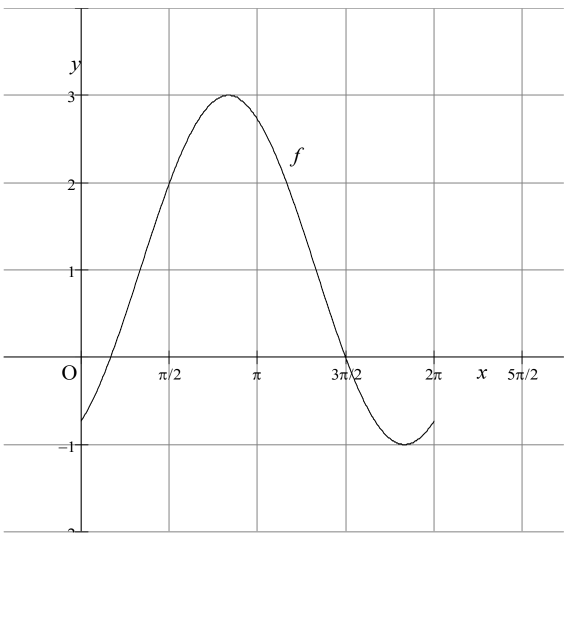
$$g(x)=\left(\sin(x)\right)^2.\cos(x)\Rightarrow g'(x)=2\sin(x).\cos(x).\cos(x)+\sin^2(x).(-\sin(x))=$$
$$2\sin(x).\left(1-\sin^2(x)\right)-\sin^3(x)=2\sin(x)-2\sin^3(x)-\sin^3(x)=2\sin(x)-3\sin^3(x)$$

c.

$$h(x)=\frac{\tan(x)}{\sin(x)}=\tan(x).\frac{1}{\sin(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}.\frac{1}{\sin(x)}=\frac{1}{\cos(x)}\Rightarrow$$
$$h'(x)=\frac{0-(-\sin(x))}{\cos^2(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

36. $f(x)=1+2\sin(x-\frac{1}{3}\pi)$ op het interval [0 , 2π]

a. De amplitude is 2 ; ev. stand is 1 ;
$T(1,\frac{1}{3}\pi)$ en de periode is 2π. $\Rightarrow$
Zie de figuur.



b. Voor een horizontale raaklijn geldt :
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos(x-\frac{1}{3}\pi)=0 \Rightarrow$
$x-\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}\pi+k.\pi \Leftrightarrow x=\frac{5}{6}\pi+k\pi \Rightarrow$
$x=\frac{5}{6}\pi \vee x=1\frac{5}{6}\pi \Rightarrow$
De gevraagde punten zijn :
$(\frac{5}{6}\pi, 3)$ en $(1\frac{5}{6}\pi, -1)$
Andere manier:

De toppen van de normale sinusfunctie zijn ($(\frac{1}{2}\pi, 1)$ en ($(1\frac{1}{2}\pi, -1)$ Op deze functie is een verm. toegepast met factor 2 (dus amplitude 2) en een translatie ($T(1, \frac{1}{3}\pi)$ $\Rightarrow$
De toppen zijn dus : ($\frac{5}{6}\pi$, 3) en (1 $\frac{5}{6}\pi$, -1)

37.

a. $f(x) = -2 + 2\sin(3x - \frac{1}{2}\pi) \Rightarrow f'(x) = 2\cos(3x - \frac{1}{2}\pi).3 = 6\cos(3x - \frac{1}{2}\pi)$
Voor de toppen geldt: $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = 0 \Leftrightarrow 3x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi + k.\pi \Rightarrow$
$3x = \pi + k.\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\pi + k.\frac{1}{3}\pi \Rightarrow$ De toppen in één periode zijn :
$\left(\frac{1}{3}\pi, 0\right)$ en ($\frac{2}{3}\pi, -4)$ De periode van f is $\frac{2}{3}\pi \Rightarrow$
Alle toppen zijn dus : $\left(\frac{1}{3}\pi + k.\frac{2}{3}\pi, 0\right)$ en ($\frac{2}{3}\pi + k.\frac{2}{3}\pi, -4)$

b. Nu de andere methode bij $g(x) = 2 + \cos(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\pi)$
g heeft de periode $3.2\pi = 6\pi$ De eerste top is bij het beginpunt. Dat is bij
$-1\frac{1}{2}\pi + 3\pi = 1\frac{1}{2}\pi$ $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\pi = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x = -\frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow x = -1\frac{1}{2}\pi$ Daar is nu het maximum .
Aangezien de periode 6π is weten we nu ook dat het minimum is bij
$x = -1\frac{1}{2}\pi + 3\pi = 1\frac{1}{2}\pi$. Nu deze waarden invullen. $\Rightarrow$ De toppen zijn :
$\left(-1\frac{1}{2}\pi + k.6\pi, 3\right)$ en $\left(1\frac{1}{2}\pi + k.6\pi, 1\right)$

c. $h(x) = 1 - 3\sin(x + \frac{1}{6}\pi)$ Het beginpunt bij h is bij $x = -\frac{1}{6}\pi$. De periode is 2π .
Er is ook een spiegeling. $\Rightarrow$ De eerste top bij $x = -\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{4}.2\pi = \frac{1}{3}\pi$
De andere top is bij $x = \frac{1}{3}\pi + \pi = 1\frac{1}{3}\pi$. Deze waarden invullen geeft de toppen.
$\left(\frac{1}{3}\pi + k.2\pi, -2\right)$ en $\left(1\frac{1}{3}\pi + k.2\pi, 4\right)$

d. $j(x) = -2 - \cos(2x)$ De periode is π . Er is verder een translatie 2 omlaag.
De toppen zij dus bij $x = 0$, $0{,}5\pi$ en periodes verder. $\Rightarrow$ De toppen zijn :
$(0 + k\pi , -3)$ en $(0{,}5\pi + k\pi , -1)$

38. $f(x) = \cos(2x) - 2\sin(x) + 2$ op het domein $[0 , 2\pi]$

a. Eerst $f'(x) \Rightarrow$ $f'(x) = -\sin(2x).2 - 2\cos(x) = -2\sin(2x) - 2\cos(x)$

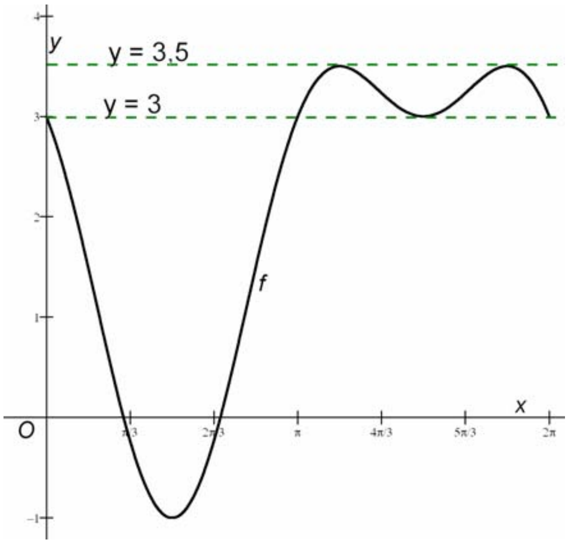
$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & -2\sin(2x) - 2\cos(x) = 0 \\
& -\sin(2x) = \cos(x) \\
& \sin(-2x) = \cos(x) \\
& \cos(\tfrac{1}{2}\pi + 2x) = \cos(x)
\end{aligned}
$$

$$\tfrac{1}{2}\pi + 2x = x + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad \tfrac{1}{2}\pi + 2x = -x + k\cdot 2\pi$$
$$\Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad 3x = -\tfrac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$$
$$x = -\tfrac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\tfrac{1}{6}\pi + k\cdot \tfrac{2}{3}\pi$$
$$x \text{ op } [0, 2\pi] \Rightarrow \quad x = 1\tfrac{1}{2}\pi \qquad \tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{7}{6}\pi,\ \tfrac{11}{6}\pi$$
$$x_A = \tfrac{1}{2}\pi \Rightarrow y_A = f(\tfrac{1}{2}\pi) = -1;\ x_B = 1\tfrac{1}{6}\pi \Rightarrow y_B = f(1\tfrac{1}{6}\pi) = 3\tfrac{1}{2} \Rightarrow A(\tfrac{1}{2}\pi, -1);\ B(1\tfrac{1}{6}\pi, 3\tfrac{1}{2})$$
$$x_C = 1\tfrac{1}{2}\pi \Rightarrow y_C = f(1\tfrac{1}{2}\pi) = 3; x_D = 1\tfrac{5}{6}\pi \Rightarrow y_D = f(1\tfrac{5}{6}\pi) = 3\tfrac{1}{2} \Rightarrow C(1\tfrac{1}{2}\pi, 3);\ D(1\tfrac{5}{6}\pi, 3\tfrac{1}{2}).$$

b.

Zie de figuur hiernaast:
het **aantal oplossingen** van de vergelijking $f(x) = p$ is gelijk aan het **aantal snijpunten** van de grafiek met de horizontale lijn $y = p$.

Sterker nog: de oplossingen van de vergelijking zijn de x-coördinaten van de snijpunten.
Het zal duidelijk zijn dat er vier snijpunten zijn als geldt:
p "tussen" 3 en 3,5 ligt: $\boxed{3 \le p < 3{,}5}$.



39. $f(x) = \tfrac{1}{2}x + \cos(x)$ op het domein : [0 , 7].

a.

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x + \cos(x) \quad \Rightarrow f'(x) = \tfrac{1}{2} - \sin(x)$$
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} - \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \quad \sin(x) = \tfrac{1}{2}$$
$$\left.\begin{array}{l} x = \tfrac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \tfrac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi \\ x \text{ op } [0, 7] \end{array}\right\} \Rightarrow x = \boxed{\tfrac{1}{6}\pi,\ \tfrac{5}{6}\pi,\ 2\tfrac{1}{6}\pi}$$

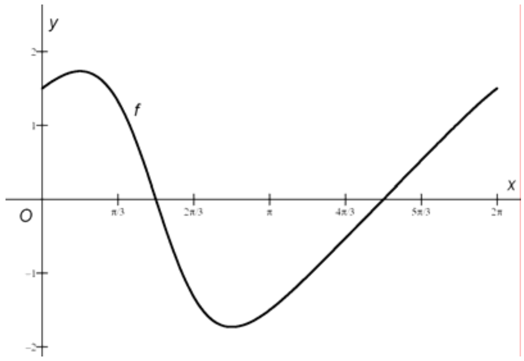
b.

$$f'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} - \sin(x) = 1 \Leftrightarrow \quad \sin(x) = -\tfrac{1}{2};$$
$$x = -\tfrac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \pi - -\tfrac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi$$
$$\left.\begin{array}{l} x = -\tfrac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \tfrac{7}{6}\pi + k\cdot 2\pi \\ x \text{ op } [0, 7] \end{array}\right\} \Rightarrow x = \boxed{\tfrac{7}{6}\pi,\ \tfrac{11}{6}\pi}$$

40. $f(x) = \cos^3(x)$ op het domein [0 , 2π]

Horizontale raaklijn $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$
$f'(x) = 3.\cos^2(x).(-\sin(x)) \Leftrightarrow f'(x) = -3\sin(x).\cos^2(x)$
$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0 \vee \cos^2(x) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0 + k\pi \vee x = 0{,}5\pi + k.\pi$ Op het gegeven interval krijgen we dus :
0 ; π ; 2π ; 0,5π ; 1,5π .
$\Rightarrow$ De coördinaten van de punten zijn dus :
(0 , 1) ; (π , -1) ; (2π , 1) ; (0,5π ; 0) en (1,5π ,0)

41. $f(x)=\dfrac{3\cos(x)}{2-\sin(x)}$



a

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3\cos(x)}{2-\sin(x)}=0 \Rightarrow\ 3\cos(x)=0 \quad \Rightarrow$

$x=\frac{1}{2}\pi \ \vee\ x=1\frac{1}{2}\pi$ Stel $C(\frac{1}{2}\pi,\ 0)$; $D(1\frac{1}{2}\pi, 0)$

$$f'(x)=\frac{-3\sin(x).(2-\sin(x)-3\cos(x).(-\cos(x))}{\left(2-\sin(x)\right)^2}=\frac{-6\sin(x)+3\sin^2(x)+3\cos^2(x)}{\left(2-\sin(x)\right)^2}=\frac{3-6\sin(x)}{\left(2-\sin(x)\right)^2}$$

$\Rightarrow f'(\frac{1}{2}\pi)=-3 \qquad f'(1\frac{1}{2}\pi)=1$

$k:\ y=-3x+b$ door $C(\frac{1}{2}\pi,\ 0)$ $\qquad p:\ y=x+b$ door $D(1\frac{1}{2}\pi,\ 0)$

$\Rightarrow\ 0=-1\frac{1}{2}\pi+b \Rightarrow b=1\frac{1}{2}\pi \qquad \Rightarrow\ 0=1\frac{1}{2}\pi+b \Rightarrow b=-1\frac{1}{2}\pi$

$k:\ \boxed{y=-3x+1\frac{1}{2}\pi} \qquad p:\ \boxed{y=x-1\frac{1}{2}\pi}$

b.

$f(x)=\dfrac{3\cos(x)}{2-\sin(x)} \qquad \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-6\sin(x)+3}{\left(2-\sin(x)\right)^2};$

$f'(x)=0 \qquad \Rightarrow\ -6\sin(x)+3=0 \Leftrightarrow \qquad \sin(x)=\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow\ x=\frac{1}{6}\pi \ \vee\ x=\frac{5}{6}\pi$

Uit de grafiek zien we dat hier de maximale en minimale waarden zijn.

Nu is : $f\left(\frac{1}{6}\pi\right)=\dfrac{3.\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ en $f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{3.\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}{2-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$

Het totale bereik is dus : $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

42.

a. $F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos(3x) \Rightarrow F'(x)=-\dfrac{1}{3}.(-\sin(3x)).3=\sin(3x)=f(x)\ \Rightarrow$

F(*x*) is een primitieve van *f*(*x*).

b. $G(x)=\dfrac{1}{5}\sin(5x) \Rightarrow G'(x)=\dfrac{1}{5}.\cos(5x).5=\cos(5x)=g(x)\ \Rightarrow$

G(*x*) is een primitieve van *g*(*x*)

43.

a. $f(x)=4\cdot\sin\left(\frac{1}{3}x\right) \qquad \Rightarrow \qquad F(x)=-12\cdot\cos\left(\frac{1}{3}x\right)+c$

b. $g(x)=x^2-5\cos(2x)\ \Rightarrow G(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}\cdot\sin(2x)+c$

c. $h(x) = \sin(2x + \tfrac{1}{3}\pi) \quad \Rightarrow \quad H(x) = -\tfrac{1}{2}\cos(2x + \tfrac{1}{3}\pi) + c$

d. $j(x) = 3\cos(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{6}\pi) \quad \Rightarrow \quad J(x) = 6\sin(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{6}\pi) + c$

44.

a.

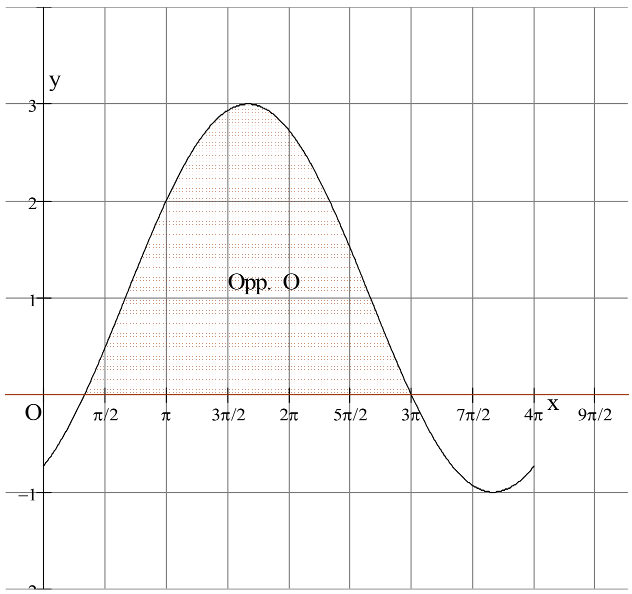
$$\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \left(2x + \cos(\tfrac{1}{2}x)\right)\cdot \mathrm{d}x = \left[x^2 + 2\sin(\tfrac{1}{2}x)\right]_0^{\frac{1}{3}\pi} = \frac{1}{9}\pi^2 + 2.\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{9}\pi^2 + 1$$

b.

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \left(x^2 - 2\sin(x - \tfrac{1}{6}\pi)\right)\cdot \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + 2\cos(x - \tfrac{1}{6}\pi)\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} = \quad \Rightarrow$$

$$\left(\tfrac{1}{81}\pi^3 + \sqrt{3}\right) - \left(\tfrac{1}{648}\pi^3 + 2\right) = \frac{7}{648} \quad + \sqrt{3} - 2$$

45. Gegeven : $f(x) = 1 + 2.\cos(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{6}\pi)$



Snijpunten met de x-as $\Rightarrow$

$1 + 2.\cos(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{6}\pi) = 0$

$\tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{6}\pi = -\tfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \ \vee$

$\tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{6}\pi = \tfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \Leftrightarrow$

$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi \vee \ \tfrac{1}{2}x = 1\tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi$

$x = \tfrac{1}{3}\pi + 4k\pi \ \vee \ x = 3\pi + 4k\pi$

$\Rightarrow$ De grenzen zijn bij

$x = \tfrac{1}{3}\pi \ \vee \ x = 3\pi$.

De oppervlakte is :

$$\int_{\frac{1}{3}\pi}^{3\pi} 1 + 2\cos\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{6}\pi\right)dx = \left[x + 4\sin(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{6}\pi)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{3\pi} =$$

$$3\pi + 4\sin(1,5\pi - \tfrac{5}{6}\pi) - \left(\tfrac{1}{2}\pi + 4\sin\left(\tfrac{1}{6}\pi - \tfrac{5}{6}\pi\right)\right) = 3\pi + 2\sqrt{3} - 0,5\pi + 2\sqrt{3} = 2,5\pi + 4\sqrt{3}$$

46.

a. $y = \dfrac{1}{3}\sin^3(x)$ is geen primitieve van $f(x) = \sin^2(x)$ want de afgeleide wordt nu :

$y' = \dfrac{1}{3}.3.\sin^2(x).\cos(x) = \sin^2(x) \,.\, \cos(x)$ Deze afgeleide is niet gelijk aan $y = \sin^2(x)$.

b. $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A) \Leftrightarrow 2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A) \Leftrightarrow \sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$

Met deze formule erbij krijgen we nu : $f(x) = \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

c. Een primitieve van $f(x)$ is nu : $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \text{c}$

47

a.

$f(x) = \cos^2(x)$; *apart*: $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Rightarrow$ $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ $\Rightarrow$
$f(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ $\Rightarrow$ $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$

b.

$g(x) = \sin^2(3x)$;bekend: $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \Rightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) \Rightarrow$
$\sin^2(3x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(6x) \Rightarrow$

$g(x) = \sin^2(3x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(6x) \Rightarrow$ $G(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin(6x) + c$

c. $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x).\cos(\frac{1}{2}x)$ We kennen de formule sin(2A)=2sin(A).cos(A) $\Rightarrow$

sin(A).cos(A) = $\frac{1}{2}\sin(2A)$ Als we deze formule gaan toepassen dan krijgen we :

$f(x) = \sin(\frac{1}{2}x).\cos(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}.2\sin(\frac{1}{2}x).\cos(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\sin(x) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + c$

48.

a. $f(x) = \tan^2(x) = \tan^2(x) + 1 - 1 \Rightarrow F(x) = \tan(x) - x + c$

b. $f(x) = x + \tan^2(x) = x + \tan^2(x) + 1 - 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \tan(x) - x + c$

49.

a. $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \sin(2x).\cos(2x)dx = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{2}.2\sin(2x).\cos(2x)dx = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{2}.\sin(4x)dx = \left[-\frac{1}{8}\cos(4x)\right]_0^{\frac{1}{6}\pi} =$

$\frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$

b. $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \left(2 - \frac{1}{2}\sin^2(x)\right)dx = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \left(2 - \frac{1}{2}\sin^2(x)\right)dx$ apart: cos(2A) = 1 – 2sin^2(A) $\Rightarrow$

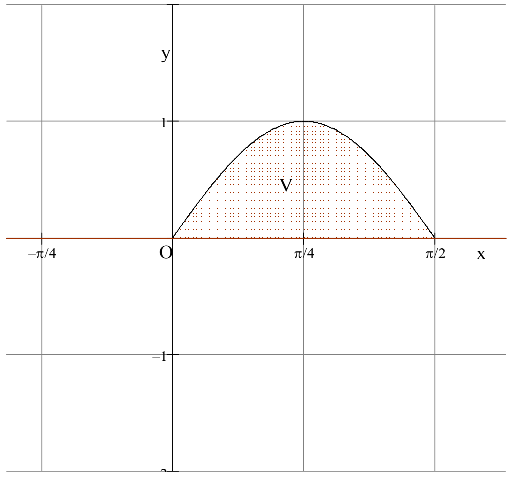
sin^2(A) = 0,5 – 0,5.cos(2A) Nu deze formule gaan toepassen $\Rightarrow$

$\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \left(2 - \frac{1}{2}\sin^2(x)\right)dx = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \left(2 - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)\right)dx = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \left(2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(2x)\right)dx =$

$$\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi}\left(1\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos(2x)\right)dx=\left[1\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}\sin(2x)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi}=\left(1\frac{3}{4}\pi+0\right)-\left(1\frac{3}{4}.\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{8}.\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=$$

$$\frac{7}{4}\pi-\frac{7}{12}\pi-\frac{1}{16}\sqrt{3}=1\tfrac{1}{6}\pi-\frac{1}{16}\sqrt{3}$$

50. $f(x)=\sin(2x)$ op het interval $[0\ ,\ \tfrac{1}{2}\pi]$



$$I=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\pi\left(\sin^2(2x)\right)\cdot \mathrm{d}x\ ;$$

$$Apart:\quad \cos(2A)=1-2\sin^2(A)\Rightarrow \sin^2(A)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(2A)$$

$$\Rightarrow \sin^2(2x)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(4x)\Rightarrow$$

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\pi\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(4x)\right)\cdot \mathrm{d}x=\left[\tfrac{1}{2}\pi x-\tfrac{1}{8}\sin(4x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=$$

$$\left(\tfrac{1}{4}\pi^2+0\right)-\left(0-0\right)=\tfrac{1}{4}\pi^2$$

51. $f(x)=2\sin^2(x)+\sin(x)-1$

a.

$$f(x)=2\sin^2(x)+\sin(x)-1\Rightarrow\qquad f'(x)=4\sin(x)\cdot\cos(x)+\cos(x)$$

$$f'(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad \cos(x)\left(4\sin(x)+1\right)=0\quad\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x)=0\quad\vee\quad \sin(x)=-\tfrac{1}{4}\\ x\ \text{ op } [0,\,2\pi]\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$x=\tfrac{1}{2}\pi,\ 1\tfrac{1}{2}\pi,\ x_0,\ x_1$. Waarbij van x_0 en x_1 bekend is dat ze niet gemakkelijk als exact getal geschreven kunnen worden, maar waarvoor geldt: $\sin(x_0)=\sin(x_1)=-\tfrac{1}{4}$.
Zie nu grafiek:

$$\left.\begin{array}{l}\max.\ f(\tfrac{1}{2}\pi)=2\\ \max.f(1\tfrac{1}{2}\pi)=0\\ \min.f(x_0)=f(x_1)=2\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right)^2-\tfrac{1}{4}-1=-1\tfrac{1}{8}\end{array}\right\}\Rightarrow B_f=[-1\tfrac{1}{8},\ 2]$$

b. De snijpunten met de x-as $\Rightarrow$

$$2\sin^2(x)+\sin(x)-1=0\qquad 2p^2+p-1=0\qquad\Rightarrow p=\tfrac{1}{2}\ \vee\ p=-1$$

$$\sin(x)=\tfrac{1}{2}\quad\vee\quad \sin(x)=-1 \text{ op } [0,\ 2\pi]\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x=\tfrac{1}{6}\pi\ \vee\ x=\tfrac{5}{6}\pi\quad\vee\quad x=1\tfrac{1}{2}\pi\\ \text{grafiek}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \text{Opp vlakdeel}=\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}\left(2\sin^2(x)+\sin(x)-1\right)\cdot \mathrm{d}x$$

Nu is $\cos(2x)=1-2\sin^2(x) \Rightarrow \sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x) \Rightarrow 2\sin^2(x)=1-\cos(2x) \Rightarrow$

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}\left(2\sin^2(x)+\sin(x)-1\right)\cdot \mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\cancel{1}-\cos(2x)+\sin(x)\cancel{-1}\right)\cdot \mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}\left(-\cos(2x)+\sin(x)\right)\cdot \mathrm{d}x=$$

$$\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)-\left(-\tfrac{1}{4}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\tfrac{3}{4}\sqrt{3}+\tfrac{3}{4}\sqrt{3}=1\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

52. $f(x)=\sin^2(x)+\sin(x)+\frac{1}{4}$ op het interval $[0\,,2\pi\,]$

$f(x)=\sin^2(x)+\sin(x)+\frac{1}{4};\quad f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\sin^2(x)+\sin(x)+\frac{1}{4}=0$ stel $\sin(x)=p \quad \Rightarrow p^2+p+\frac{1}{4}=0$

$(p+\frac{1}{2})^2=0 \quad \Rightarrow p=-\frac{1}{2}$

$\sin(x)=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \sin^{-1}(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{6}\pi$

$$\left.\begin{array}{l} x=-\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x=\frac{7}{6}\pi+k\cdot 2\pi \\ x \text{ op } [0,2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow x=\tfrac{7}{6}\pi,\ \tfrac{11}{6}\pi$$

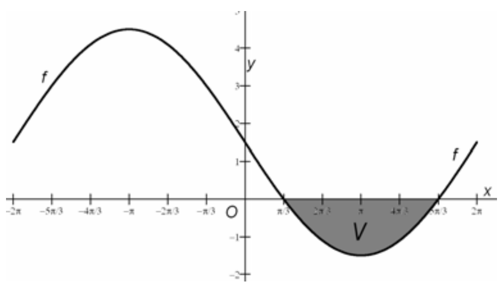
$$\text{Opp}=\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\left(\sin^2(x)+\sin(x)+\tfrac{1}{4}\right)\cdot \mathrm{d}x=$$

Apart: $\cos(2x)=1-2\sin^2(x) \quad \Rightarrow \quad \sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x) \Rightarrow$

$$\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(2x)+\sin(x)+\tfrac{1}{4}\right)\cdot \mathrm{d}x=\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\left(\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}\cos(2x)+\sin(x)\right)\cdot \mathrm{d}x=\left[\tfrac{3}{4}x-\tfrac{1}{4}\sin(2x)-\cos(x)\right]_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}=$$

$$\left(\tfrac{11}{8}\pi+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)-\left(\tfrac{7}{8}\pi-\tfrac{1}{8}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{3}{4}\sqrt{3}$$

53. Gegeven : $f(x)=1\frac{1}{2}-3\sin(\frac{1}{2}x)\ ;D_f=[-2\pi,2\pi]$



a. De periode is $2\pi/(0{,}5)=4\pi$; ew. stand is 1,5 ; de amplitude is 3
Er is sprake van een spiegeling.
Zie de figuur.

b.

$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\sin(\frac{1}{2}x)=1\frac{1}{2} \Leftrightarrow \quad \sin(x)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{1}{2}x=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}\pi+k\cdot 4\pi \vee \quad x=\frac{5}{3}\pi+k\cdot 4\pi \\ x \text{ op } [-2\pi,2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow x=\tfrac{1}{3}\pi,\ \tfrac{5}{3}\pi$$

$$\text{Opp } V=\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi}-\left(1\tfrac{1}{2}-3\sin(\tfrac{1}{2}x)\right)\cdot \mathrm{d}x=\left[-1\tfrac{1}{2}x-6\cos(\tfrac{1}{2}x)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi}=$$

$$\left(-2\tfrac{1}{2}\pi+3\sqrt{3}\right)-\left(-\tfrac{1}{2}\pi\quad -3\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}-2\pi$$

$$\Rightarrow Opp\ \ V=6\sqrt{3}-2\pi$$

c.

$$\text{Inh} = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} \pi\cdot(-f(x))^2\cdot \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} \pi\cdot(f(x))^2\cdot \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} \pi\left(\tfrac{3}{2}-3\sin(\tfrac{1}{2}x)\right)^2\cdot \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} \pi\left(\tfrac{3}{2}-3\sin(\tfrac{1}{2}x)\right)^2\cdot \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} \pi\left(\tfrac{9}{4}-9\sin(\tfrac{1}{2}x)+9\sin^2(\tfrac{1}{2}x)\right)\cdot \mathrm{d}x$$

Apart:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Stel } h(x)=\pi\left(\tfrac{9}{4}-9\sin(\tfrac{1}{2}x)+9\sin^2(\tfrac{1}{2}x)\right)\\ \text{Nu is } \cos(2x)=1-2\sin^2(x)\Rightarrow \sin^2(x)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\Rightarrow \sin^2(\tfrac{1}{2}x)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(x)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$h(x)=\pi\left(\tfrac{9}{4}-9\sin(\tfrac{1}{2}x)+9\cdot\tfrac{1}{2}-9\cdot\tfrac{1}{2}\cos(x)\right)=\pi\left(\tfrac{9}{4}-9\sin(\tfrac{1}{2}x)+\tfrac{9}{2}-\tfrac{9}{2}\cos(x)\right)=$$

$$\pi\left(6\tfrac{3}{4}-9\sin(\tfrac{1}{2}x)-4\tfrac{1}{2}\cos(x)\right)\ \Rightarrow$$

$$\text{Inhoud} = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \pi\left(6\tfrac{3}{4}-9\sin(\tfrac{1}{2}x)-4\tfrac{1}{2}\cos(x)\right)dx = \left[\pi\left(6\tfrac{3}{4}x+18\cos(\tfrac{1}{2}x)-4\tfrac{1}{2}\sin(x)\right)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} =$$

$$\left(11\tfrac{1}{4}\pi^2-9\pi\sqrt{3}+2\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{3}\right)-\left(2\frac{1}{4}\pi^2+9\sqrt{3}-2\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)=$$

$$11\tfrac{1}{4}\pi^2-6\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{3}-2\frac{1}{4}\pi^2-6\frac{3}{4}\sqrt{3}=9\pi^2\ -13\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{3}\Rightarrow$$

De gevraagde inhoud is : $9\pi^2\ - 13\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}$

Opmerking:
We gaan in het vervolg veel uit van de formules : $y=a\sin(c(t-b))+d$ **of**
$y=a\cos(c(t-b))+d$

Hierin heeft *a* te maken met de amplitude , verder geldt : *c* = $\dfrac{2\pi}{periode}$ **en we gaan uit van de translatie :** $T(b,d)$**.**

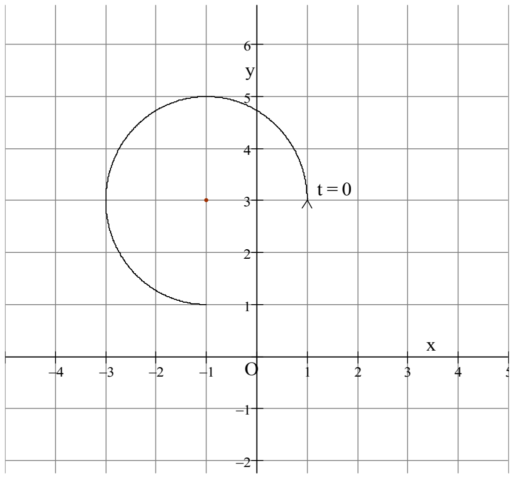
54.

a. Rondgang is 5 seconden $\Rightarrow$ de periode is dus 5. De amplitude is 1 en er is sprake van een positieve draairichting. $\Rightarrow\ y_P=\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right)$

b. De amplitude is weer 1. De periode is ook 5 en ook weer een positieve draairichting $\Rightarrow$
$x_P=\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right)$

55. De r.c. van de lijn $y = -x + 3$ is -1 $\Rightarrow$ In ΔABM hebben we te maken met een rechthoekige driehoek en 2 hoeken van 45° . $\Rightarrow$ AB = MB Stel de zijde is $x \Rightarrow x^2 + x^2 = 4^2 \Rightarrow$
$x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ AB = BM = $2\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ De coördinaten van A zijn : $x_A = 2 - 2\sqrt{2}$ en $y_A = 1 + 2\sqrt{2}$.

56. Gegeven : $\begin{cases} x = -1 + 2\cos(t) \\ y = 3 + 2\sin(t) \end{cases}$ op het interval $[0 , 1\frac{1}{2}\pi]$



a. De periode is 2π . Nu het ¾ deel. De draairichting is links om. Het middelpunt is (-1 , 3) en de straal is 2. Het beginpunt is (1 , 3) . Het eindpunt is (-1 , 1) .

b. Snijpunt y-as $\Rightarrow$ $x = 0 \Rightarrow$ $-1 + 2\cos(t) = 0 \Leftrightarrow$
$\cos(t) = 0{,}5 \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{3}\pi \;\Rightarrow$ Het snijpunt is $(0 , 3 + \sqrt{3})$

c. Snijpunt met l : $y = x + 4 \;\Rightarrow$ invullen $\Rightarrow$ $3 + 2\sin(t) = -1 + 2\cos(t) + 4 \;\Leftrightarrow$
$2\sin(t) = \cos(t) \Leftrightarrow \sin(t) = \cos(t) \;\Leftrightarrow t = \frac{1}{4}\pi \vee t = 1\frac{1}{4}\pi \;\Rightarrow$ De punten zijn dus :
$B(-1 + \sqrt{2} , 3 + \sqrt{2})$ en $C(-1 - \sqrt{2} , 3 - \sqrt{2})$

d. Links van de lijn $x = -2 \Rightarrow$ De snijpunten van de kromme met deze verticale lijn. $\Rightarrow$
$-1 + 2\cos(t) = -2 \Leftrightarrow 2\cos(t) = -1 \Leftrightarrow \cos(t) = -0{,}5 \;\Rightarrow\; t = \frac{2}{3}\pi \vee t = \frac{4}{3}\pi$.
De kromme gaat linksom en het eerste snijpunt is bij $t = \frac{2}{3}\pi \;\Rightarrow$
De kromme is links van de lijn $x = -2$ voor $\frac{2}{3}\pi < t < \frac{4}{3}\pi$.

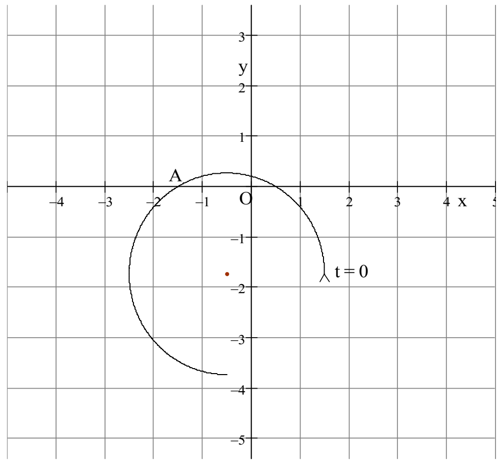
Kleine vergissing .
Het vorige gedeelte was exact: Nu met GR.
Voer in : $y_1 = -1 + 2\cos(x)$ en $y_2 = -2$ Met intersect vinden we de snijpunten bij $x = t \approx 2{,}09$ en bij $x = t \approx 4{,}19$. Bij $t \approx 2{,}09$ hebben we het bovenste snijpunt en de kromme gaat linksom. $\Rightarrow$ De kromme is links van de lijn $x = -2$ voor $2{,}09 < t < 4{,}19$.

57.

a. Hoeksnelheid is 2 rad/s $\Rightarrow \omega = 2$; m.p. is (5 , 2) en $r = 3$ Beginpunt is (8,2) $\Rightarrow$
De p.v. van de kromme is : $\begin{cases} x = 5 + 3\cos(2t) \\ y = 2 + 3\sin(2t) \end{cases}$

b. Eerst de t-waarden berekenen van de snijpunten van de kromme met de x-as. $\Rightarrow$ $y = 0 \Rightarrow$
$2 + 3\sin(2t) = 0 \;\Rightarrow$ Voer in $y_1 = 2 + 3\sin(2x)$ en $y_2 = 0$ Met intersect vinden we :
$x = t \approx 1{,}94 \;\vee\; x = t \approx 2{,}78$. Tussen die twee waarden is de sinus negatief. $\Rightarrow$
Het aantal seconden onder de x-as is dus ongeveer $2{,}777 - 1{,}936 \approx 0{,}84$ sec.

58. Gegeven de kromme : $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + 2\cos(2t) \\ y = -\sqrt{3} + 2\sin(2t) \end{cases}$ op het interval $[0\ ,\ \frac{3}{4}\pi\ ]$.



a. $\omega = 2 \Rightarrow$ De kromme draait links om. Het m.p. is $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$. Het beginpunt bij $t = 0$ is bij het punt ($\left(1\frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$. De straal is 2.
Zie de figuur.

b. Snijpunt met de x-as $\Rightarrow$ $y = 0 \Rightarrow$
$-\sqrt{3} + 2\sin(2t) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(2t) = \sqrt{3} \Leftrightarrow$
$\sin(2t) = 0{,}5\sqrt{3} \Rightarrow$
$2t = \frac{1}{3}\pi + k.2\pi \vee 2t = \frac{2}{3}\pi + k.2\pi \Leftrightarrow$
$t = \frac{1}{6}\pi + k.\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k.\pi$
Binnen het interval geeft dit $t = \frac{1}{6}\pi \ \vee\ t = \frac{1}{3}\pi$.
$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft het punt (0,5 ; 0) (niet gevraagd) en $t = \frac{1}{3}\pi$ geeft het punt (-1,5 ; 0) $\Rightarrow$
A is dus het punt (-1,5 ; 0).

c. K snijden met $x = -1{,}5 \Rightarrow -0{,}5 + 2\cos(2t) = -1{,}5 \Leftrightarrow 2\cos(2t) = -1 \Leftrightarrow \cos(2t) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$
$\cos(2t) = \cos\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) \Leftrightarrow 2t = \dfrac{2}{3}\pi + k.2\pi \vee 2t = -\dfrac{2}{3}\pi + k.2\pi \Leftrightarrow$
$t = \dfrac{1}{3}\pi + k.\pi \vee t = -\dfrac{1}{3}\pi + k.\pi$ Verder ligt t binnen het gegeven interval $\Rightarrow$
$t = \dfrac{1}{3}\pi \vee t = \dfrac{2}{3}\pi$ Zie verder de schets van de x–grafiek $\Rightarrow$
Voor alle t met $\dfrac{1}{3}\pi < t < \dfrac{2}{3}\pi$ liggen de punten van K links van de lijn $x = -1{,}5$.

d. Eerst de snijpunten met $y = -2 \Rightarrow -\sqrt{3} + 2\sin(2t) = -2 \Rightarrow$
Voer in $y_1 = -\sqrt{3} + 2\sin(2x)$ en $y_2 = -2$ Intersect geeft $t \approx 1{,}64$.
We zien verder aan de grafiek van $y = -\sqrt{3} + 2\sin(2t)$ dat rechts van het snijpunt de grafiek onder de hoogte -2 ligt. $\Rightarrow$ Het gevraagde geldt voor : $1{,}69 < t \leq \frac{3}{4}\pi$

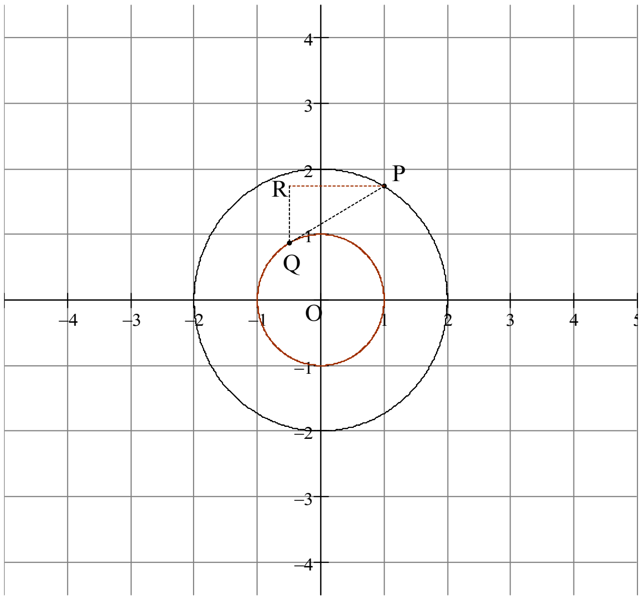
59. $\begin{cases} x_P = 2\cos(t) \\ y_P = 2\sin(t) \end{cases}$ met t in seconden.

a. Snijpunten met $y = x + 1 \Rightarrow$ invullen in de vergelijking. $\Rightarrow 2\sin(t) = 2\cos(t) + 1$
Voer in : $y_1 = 2\sin(x)$ en $y_2 = 2\cos(x) + 1$ Met intersect vinden we de snijpunten bij $x = t \approx 1{,}147$ en bij $x = t \approx 3{,}566$ Dit nu invullen in de gegeven parametervoorstelling.
Dit geeft de snijpunten (0,82 ; 1,82) en (-1,82 ; -0,82)

b. Nu de kromme snijden met de lijn $x = 1 \Rightarrow$ $2\cos(t) = 1 \Leftrightarrow \cos(t) = 0{,}5 \Rightarrow$
Tussen het interval [0 , 2π] krijgen we dan $t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = \frac{5}{3}\pi$.
Tussen deze waarden is de waarde van $2\cos(t)$ minder dan 1. We moeten echter de waarden boven de 1 krijgen. (In de parameterkromme dus rechts van de 1 !!!!)
We moeten dan dus t nemen tussen $-\frac{1}{3}\pi$ en $\frac{1}{3}\pi$ nemen.
De middelpuntshoek is dan dus 120°
De totale omtrek van de cirkel is 2π .2 = 4π De gevraagde lengte is $\frac{1}{3}.4\pi = 1\frac{1}{3}\pi$.

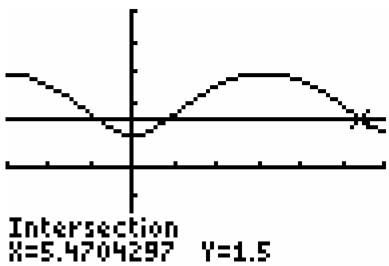
c. $\begin{cases} x_Q = 2\cos(2t) \\ y_Q = 2\sin(2t) \end{cases}$

We hebben dus te maken met de punten P en Q op twee verschillende cirkels.
In de rechthoekige driehoek PQR gaan we nu Pyth. toepassen. ⇒
$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$ Nu de coördinaten invullen:



$PQ^2 = \left(2\cos(t) - \cos(2t)\right)^2 + \left(2\sin(t) - \sin(2t)\right)^2 =$
$4\cos^2(t) - 4\cos(t).\cos(2t) + \cos^2(2t) + 4\sin^2(t) - 4\sin(t).\sin(2t) + \sin^2(2t) =$
$4\cos^2(t) + 4\sin^2(t) + \cos^2(2t) + \sin^2(2t) - 4\cos(t).\cos(2t) - 8\sin(t).\sin(t).\cos(t) =$
$5 - 4\cos(t).(\cos(2t) + 2\sin^2(t)) =$
$5 - 4\cos(t).(1 - 2\sin^2(t) + 2\sin^2(t)) = 5 - 4\cos(t) \Rightarrow$
$PQ = \sqrt{5 - 4\cos(t)}$

d. Er moet gelden : $\sqrt{5 - 4\cos(t)} > 1{,}5$
Voer in : $y_1 = \sqrt{5 - 4\cos(t)}$ en $y_2 = 1{,}5$
Intersect geeft $t \approx 0{,}81$ en $t \approx 5{,}47$.
Zie nu de schets:
Aflezen geeft een tijdsverschil van
5,47 – 0,81 = 4,66 sec.



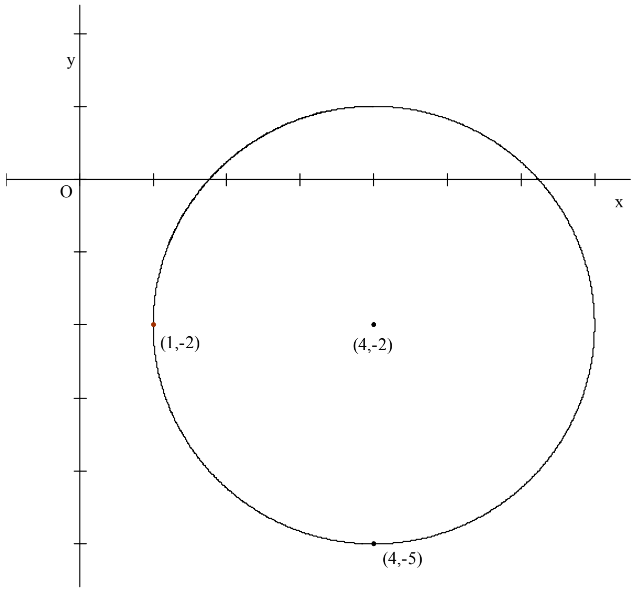
60. Gegeven : $\begin{cases} x_P = 3\cos(\frac{1}{2}t) \\ y_P = 3\sin(\frac{1}{2}t) \end{cases}$

a. Q heeft 2sec. achterstand ⇒ Op het tijdstip $t = 2$ is Q op de beginsituatie van punt P. ⇒
T(2,0)

b. $\begin{cases} x_Q = 3\cos(\frac{1}{2}(t-2)) \\ y_Q = 3\sin(\frac{1}{2}(t-2)) \end{cases}$ Als je nu $t = 2$ invult dan heb je de beginsituatie van punt P.

61.

a. Advies: Maak een schets van de situatie.



In deze schets zien we dat P onderin begint en omhoog en naar rechts gaat.
Een tabel geeft het volgende beeld van *P*.

Het punt P heeft een faseachterstand van $\frac{1}{4}$ t.o.v. de beginsituatie in het punt (7,-2)

De periode is : $\frac{2\pi}{2,5} = 0,8\pi$

We moeten ook nog rekening houden met de evenwichtsstanden en de amplitudes. ⇒

$\begin{cases} x_P = 4 + 3\cos(2,5(t - 0,2\pi) \\ y_P = -2 + 3\sin(2,5(t - 0,2\pi)) \end{cases}$

Anders: P heeft een kwart cirkel achterstand t.o.v. het beginpunt (7,-2) ⇒

$\begin{cases} x_P = 4 + 3\cos(2,5t - \frac{1}{4}.2\pi) \\ y_P = -2 + 3\sin(2,5t - \frac{1}{2}.2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 4 + 3\cos(2,5t - 0,5\pi) \\ y_P = -2 + 3\sin(2,5t - 0,5\pi) \end{cases}$

b. Voer de beide functies in . Maak de mode parameter. We lezen dan bij $t = 2$ in de tabel af : $P_{t=2}$ (1,12 ; -2,85)

c. In de eerste schets van de cirkel zien we dat punt *P* voor het eerst in punt (1,-2) komt na ¾ van de periode.. De omlooptijd is $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2,5} = \frac{4}{5}\pi$ ⇒ Het gevraagde tijdstip is dus : $\frac{3}{4}.\frac{4}{5}\pi$

⇒ voor $t = 0,6\pi$

d. Snijpunten met de *x*-as ⇒ $-2 + 3\sin(2,5(t - 0,2\pi) = 0 \Leftrightarrow \sin(2,5(t - 0,2\pi\ ) = \frac{2}{3}$

Voer in $y_1 = \sin(2,5(x - 0,2\pi\ )$ en $y_2 = \frac{2}{3}$ ⇒ $x = t \approx 0,92$ of $x = t \approx 1,59$

Nu deze waarden invullen in x_P ⇒ $x_P \approx 1,78$ of $x_P \approx 6,24$ ⇒

De coördinaten zijn : (1,78 ; 0) en (6,24 ; 0)

62.

a. m.p. (15,23) en r = 6 ; T = periode = 0,5 $\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$ Op $t = 0,1$ dan P in punt (21,23) Dit is dus het punt op dezelfde hoogte als het m.p. en rechts van het m.p.
Het beginpunt is nu in feite bij $t = 0,1 \Rightarrow$

$\begin{cases} x_P = 15 + 6\cos 4\pi(t - 0,1) \\ y_P = 23 + 6\sin 4\pi(t - 0,1) \end{cases}$ met t in seconden.

b. Q heeft een voorsprong van 0,2 sec. op punt $P \Rightarrow$ Het beginpunt van Q is dus 0,2 sec eerder $\Rightarrow Q_{t=0,1-0,2} = P_{t=0,1} \Rightarrow$ Voor punt Q geldt : $\begin{cases} x_Q = 15 + 6\cos 4\pi((t + 0,2) - 0,1) \\ y_Q = 21 + 6\sin 4\pi((t + 0,2) - 0,1) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_Q = 15 + 6\cos 4\pi(t + 0,1) \\ y_Q = 21 + 6\sin 4\pi(t + 0,1) \end{cases}$ met t in seconden.

c. Voor R geldt : $\begin{cases} x_R = 15 + 6\cos(4\pi t - \pi) \\ y_R = 21 + 6\sin(4\pi t - \pi) \end{cases}$ We gaan de formules van punt R anders schrijven zodat de translatie en dus het tijdverschil duidelijk tot uiting komt $\Rightarrow$

$\begin{cases} x_R = 15 + 6\cos(4\pi t - \pi) \\ y_R = 21 + 6\sin(4\pi t - \pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_R = 15 + 6\cos(4\pi(t - 0,25)) \\ y_R = 21 + 6\sin(4\pi(t - 0,25)) \end{cases} \Rightarrow$ R heeft een achterstand van 0,25 t.o.v. het beginpunt (23 , 23). $\Rightarrow$ R heeft dus een achterstand van 0,15 t.o.v. punt P.
Aangezien de totale periode 0,5 seconde is . Mag je ook zeggen dat R een voorsprong heeft van 0,35 seconde.

63. $\omega = 4$ rad/s en m.p. (-1,2) en straal 3.

a. Bij $t = 0$ is $P(2,2) \Rightarrow$ Het meest rechtse punt van de cirkel. $\Rightarrow \begin{cases} x_P = -1 + 3\cos(4t) \\ y_P = 2 + 3\sin(4t) \end{cases}$ Q heeft een faseachterstand van $\frac{1}{3}$ op P. $\Rightarrow \frac{1}{3}$.periode = $\frac{1}{3}$.0,5π = $\frac{1}{6}$π $\Rightarrow$ de formules voor Q worden nu : $\begin{cases} x_Q = -1 + 3\cos\left(4(t - \frac{1}{6}\pi)\right) \\ y_Q = 2 + 3\sin\left(4(t - \frac{1}{6}\pi)\right) \end{cases}$ met t in seconden.

Anders: Q heeft een faseachterstand van $\frac{1}{3}$ t.o.v. punt P. Dan heeft Q dus een achterstand van $\frac{1}{3}.2\pi = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow$ De vergelijkingen worden nu :

$\begin{cases} x_Q = -1 + 3\cos\left(4t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ y_Q = 2 + 3\sin\left(4t - \frac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$

b. Nu P in (-1 , 5) dus boven in: $\Rightarrow$ De fasevoorsprong t.o.v. punt (2,2) is dus $\frac{1}{4}$. Vervolgens de fasevoorsprong is $\frac{1}{6}$ t.o.v. het punt (-1 , 5) $\Rightarrow$ Totale fasevoorsprong is dus : $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

$\frac{5}{12}$.periode $=\frac{5}{12}.0{,}5\pi=\frac{5}{24}\pi$ $\Rightarrow$ de formules voor Q worden nu :

$$\begin{cases} x_Q=-1+3\cos\left(4(t+\frac{5}{24}\pi)\right) \\ y_Q=2+3\sin\left(4(t+\frac{5}{24}\pi)\right) \end{cases}$$

Anders:

Q heeft een fasevoorsprong van $\frac{1}{6}$ t.o.v. P. Zoals al vermeld heeft Q een voorsprong van $\frac{5}{12}$ t.o.v. het punt (-1,5) $\Rightarrow$ De voorsprong is dus : $\frac{5}{12}.2\pi=\frac{5}{6}\pi$ $\Rightarrow$

De vergelijkingen zijn dus :

$$\begin{cases} x_Q=-1+3\cos\left(4t+\frac{5}{6}\pi)\right) \\ y_Q=2+3\sin\left(4t+\frac{5}{6}\pi\right) \end{cases}$$

c. Nu $P(-4 , 2)$ voor $t = 0$ $\Rightarrow$ Eerst een fasevoorsprong van $\frac{1}{2}$ t.o.v. het punt (2,2) . Vervolgens een faseachterstand van $\frac{1}{4}$ t.o.v. punt (-4 , 2) $\Rightarrow$ We krijgen uiteindelijk een fase voorsprong van $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ t.o.v. punt (2 , 2) $\Rightarrow$ $\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{8}\pi$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_Q=-1+3\cos\left(4(t+\frac{1}{8}\pi)\right) \\ y_Q=2+3\sin\left(4(t+\frac{1}{8}\pi)\right) \end{cases}$

Anders:

Zoals al vermeld is de fasevoorsprong t.o.v. het punt (2,2) $\frac{1}{4}$. Dus de voorsprong is $\frac{1}{4}.2\pi=\frac{1}{2}\pi$ De vergelijkingen worden dus :

$$\begin{cases} x_Q=-1+3\cos\left(4t+\frac{1}{2}\pi\right) \\ y_Q=2+3\sin\left(4t+\frac{1}{2}\pi\right) \end{cases}$$

64. $\begin{cases} x_P=1+2\cos\left(\frac{1}{3}\pi t\right) \\ y_P=4+2\sin\left(\frac{1}{3}\pi t\right) \end{cases}$ $\begin{cases} x_Q=1+2\cos\left(\frac{1}{3}\pi t+\frac{2}{3}\pi\right) \\ y_Q=4+2\sin\left(\frac{1}{3}\pi t+\frac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$ $\begin{cases} x_R=1+2\cos\left(\frac{1}{3}\pi t-\frac{1}{2}\pi\right) \\ y_R=4+2\sin\left(\frac{1}{3}\pi t-\frac{1}{2}\pi\right) \end{cases}$

a. De voorsprong van Q op P is $\frac{2}{3}\pi$ deel van de cirkel $\Rightarrow$ De fasevoorsprong is: $\frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}=\frac{1}{3}$

b. De achterstand van R op 0,5π dat is dus het ¼ deel van de cirkel ⇒ faseachterstand is $\frac{1}{4}$.

c. De achterstand van R op Q is $\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi = 1\frac{1}{6}\pi$. ⇒ De faseachterstand is dus : $\frac{1\frac{1}{6}\pi}{2\pi} = \frac{7}{12}$

Je kan dus ook zeggen dat R een fasevoorsprong heeft van $\frac{5}{12}$ op Q. Het faseverschil is dan dus $\frac{5}{12}$.

65. $r = 20$ cm

a. Stand I ⇒ 15 omw./s ⇒ T = $\frac{1}{15}$ seconde. ⇒ c = ω = $\frac{2\pi}{\frac{1}{15}} = 30\pi$ ⇒

$\begin{cases} x_P = 20\cos(30\pi t) \\ y_P = 20\sin(30\pi t) \end{cases}$ Punt Q heeft een faseachterstand van $\frac{1}{3}$ t.o.v. *P.* ⇒

$\frac{1}{3}$.periode = $\frac{1}{3} . \frac{1}{15} = \frac{1}{45}$ ⇒ $\begin{cases} x_Q = 20\cos\left(30\pi(t - \frac{1}{45})\right) \\ y_Q = 20\sin\left(30\pi(t - \frac{1}{45})\right) \end{cases}$

Je kan ook zeggen : faseachterstand is $\frac{1}{3}$ ⇒ de achterstand is $\frac{1}{3}$.2π = $\frac{2}{3}\pi$ ⇒

$\begin{cases} x_Q = 20\cos\left(30\pi t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ y_Q = 20\sin\left(30\pi t - \frac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$

Punt R heeft een achterstand van $\frac{2}{3}$ t.o.v. P ⇒ $\frac{2}{3}$.periode = $\frac{2}{3} . \frac{1}{15} = \frac{2}{45}$

⇒ $\begin{cases} x_R = 20\cos\left(30\pi(t - \frac{2}{45})\right) \\ y_R = 20\sin\left(30\pi(t - \frac{2}{45})\right) \end{cases}$

Weer anders. Faseachterstand van $\frac{2}{3}$ ⇒ $\frac{2}{3}$.2π van de cirkel dus $\frac{4}{3}\pi$. ⇒

$\begin{cases} x_Q = 20\cos\left(30\pi t - \frac{4}{3}\pi\right) \\ y_Q = 20\sin\left(30\pi t - \frac{4}{3}\pi\right) \end{cases}$

b. Stand II $v = 108$ km/u $= \dfrac{108.1000}{3600} = \dfrac{1080}{36} = 30$ m/s . We kennen de formule $v = \omega \,.\, r$ met $r = 0{,}2$ m $\Rightarrow \omega = \dfrac{v}{r} = \dfrac{30}{0{,}2} = 150$ rad/s $\Rightarrow$ De vergelijkingen worden nu :

$$\begin{cases} x_P = 20\cos(150t) \\ y_P = 20\sin(150t) \end{cases}$$ met x en y in cm en t in seconden

66. rol I : $r_1 = 10$ cm en rol II : $r_2 = 5$ cm. m.p. rol I is (0,0) en m.p. rolII is (15,0) ; $T_I = 2$ sec .

a. Draairichting van rol I is negatief. en $c = \omega = \dfrac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow \begin{cases} x_P = 10\cos(\pi t) \\ y_P = -10\sin(\pi t) \end{cases}$

Nu rol_{II} . De draairichting is nu positief. . Nu geldt dat de omtrek van rol II $2\pi.5 = 10\pi$ is. $\Rightarrow$ De omlooptijd T is nu dus 1 sec. $\Rightarrow c = \omega = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$. Verder is het m.p. (15,0) . Ook moeten we nog rekening houden dat punt Q een fasevoorsprong van $\dfrac{1}{2}$ heeft t.o.v. het rechtse punt op de kleine rode cirkel $\Rightarrow \dfrac{1}{2}$.periode $= \dfrac{1}{2}.1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

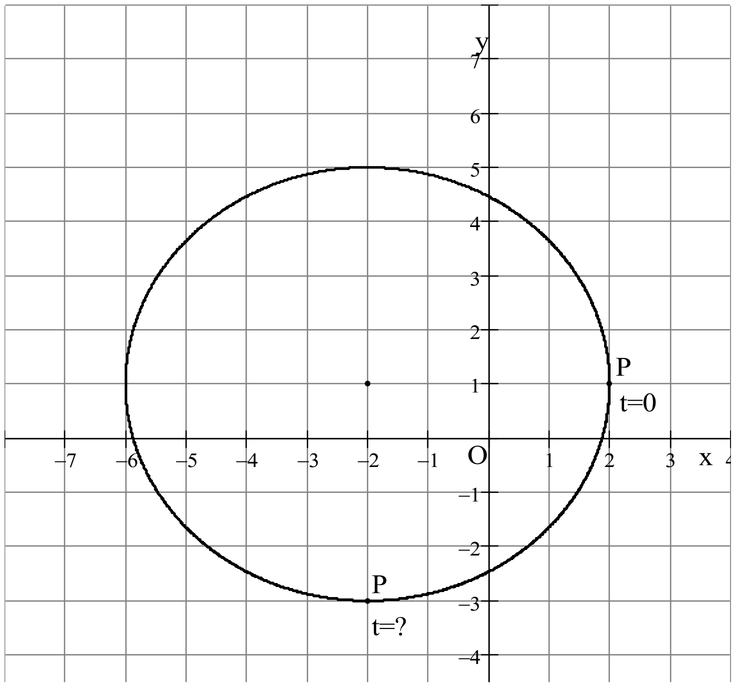
De vergelijkingen van punt Q zijn nu : $\begin{cases} x_Q = 15 + 5\cos\left(2\pi(t+\frac{1}{2})\right) \\ y_Q = 5\sin\left(2\pi(t+\frac{1}{2})\right) \end{cases}$ met x en y in cm en t in seconden.

Bij een fasevoorsprong van 0,5 is de voorsprong een halve cirkel . De vergelijkingen kan je dus ook als volgt schrijven :

$$\begin{cases} x_Q = 15 + 5\cos(2\pi t + \pi) \\ y_Q = 5\sin(2\pi t + \pi) \end{cases}$$

b. Per 2 seconden gaat er $\pi.20$ cm papier tussen de rollen door $\Rightarrow$ per uur wordt dat dus : $30.60.\pi.20 \approx 113097$ cm ≈ 1131 meter.

67. $\omega = -\pi$ rad/s.



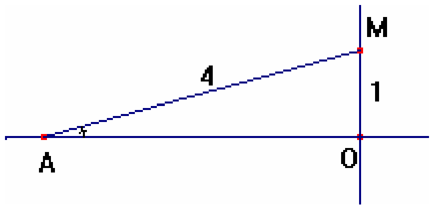
a. $\begin{cases} x_P = -2 + 4\cos(-\pi t) \\ y_P = 1 + 4\sin(-\pi t) \end{cases}$

b. Voer in in GR . We krijgen dan bij $t = 1,2$
$P_{1.2}$ (-5,24 ; 3,35)

c. Het punt (-2,-3) wordt bereikt na $\frac{1}{4}$ van de trillingstijd. De trillingstijd is 2.
De drie gevraagde tijdstippen zijn :
0,5 sec ; 2,5 sec en 4,5 sec.

d. y-as snijden geeft :
$-2 + 4\cos(-\pi t) = 0 \Leftrightarrow \cos(-\pi t) = 0,5$
$\Leftrightarrow -\pi t = -\frac{1}{3}\pi + 2k\pi \vee -\pi t = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \Leftrightarrow$
$t = -\frac{1}{3} + k.2 \vee t = \frac{1}{3} + k.2$ Invullen geeft de punten $\left(0,1+2\sqrt{3}\right)$ en $\left(0,1-2\sqrt{3}\right)$

e. Even een hulptekening:
Noem het snijpunt links van de oorsprong A en het middelpunt M . Dan geldt :
cos(∠ AMO) = 0,25 ⇒ ∠ AMO ≈ 1,138.. ⇒
De totale middelpuntshoek behorend bij het gedeelte van de cirkel onder de x-as is dan ongeveer 2,636.. rad.



⇒ De lengte van het gedeelte van de cirkel onder de x-as is dan : $\frac{2,636...}{2\pi}.2\pi.4 \approx 10,54$

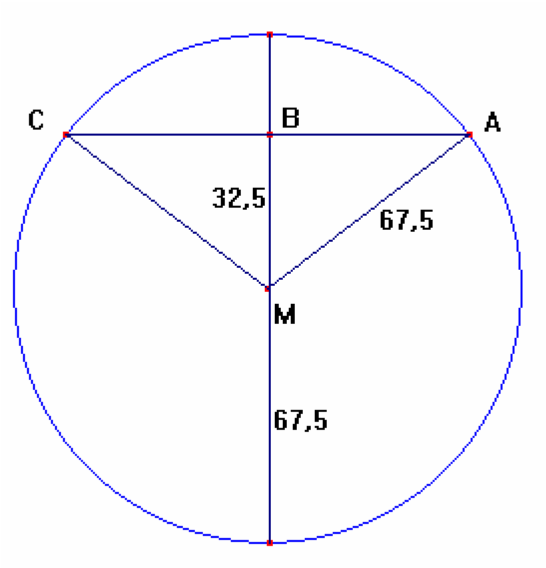
68. diameter is 135 meter ; 32 capsules ; T = 30 min ; Beginpunt (0 , 135)

a. Het beginpunt is bovenin. ⇒ De vergelijkingen zijn :
$$\begin{cases} x = 67,5.\cos\left(\frac{1}{15}\pi t + \frac{1}{2}\pi\right) \\ y = 67,5 + 67,5.\sin\left(\frac{1}{15}\pi t + \frac{1}{2}\pi\right) \end{cases}$$

b. Saskia heeft dus een faseachterstand van $\frac{1}{8}$ ⇒ De achterstand is dan dus een kwart cirkel.
De bewegingsvergelijkingen van Saskia zijn dan dus :
$$\begin{cases} x = 67,5.\cos\left(\frac{1}{15}\pi t + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \\ y = 67,5 + 67,5.\sin\left(\frac{1}{15}\pi t + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 67,5.\cos\left(\frac{1}{15}\pi t + \frac{1}{4}\pi\right) \\ y = 67,5 + 67,5.\sin\left(\frac{1}{15}\pi t + \frac{1}{4}\pi\right) \end{cases}$$

c. De gevraagde snelheid is de afgelegde weg gedeeld door de gebruikte tijd.
Een omwenteling in 30 minuten. Daarom 2 omwentelingen per uur.
De snelheid is gelijk aan de gemiddelde snelheid is dan : 2 . 2π.67,5 = 270.π meter/uur = 0,85 km/uur

d. Hoogte boven de 100 meter. Dus vanaf het middelpunt boven 32,5 meter.



Nu geldt : $\cos(\angle AMB) = \dfrac{32,5}{67,5} \Rightarrow$

$\angle AMB \approx 1,068\ldots$ rad $\Rightarrow$

$\angle CMA \approx 2,1369..$ rad. De gevraagde tijd is :

$$\frac{2,1369\ldots}{2\pi}.30\,\text{min} \approx 10,20\ldots\text{min}$$

Het aantal seconden is dan ongeveer 612 sec.